Жозефъ Бертранъ,

членъ Института и Французской Академіи, бывшій профессоръ Политехнической школы и Французской Коллегіи.

АЛГЕБРА.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ,

пересмотрѣнная

ЖОЗЕФОМЪ БЕРТРАНОМЪ

и

ГЕНРИХОМЪ ГАРСЕ,

бывшимъ профессоромъ математическихъ наукъ въ лицеѣ Генриха IV.

Переводъ безъ измѣненій съ послѣдняго французскаго изданія

М. В. ПИРОЖКОВА,

преподавателя Спб. 10-й гимназіи.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 5 л., 28.

1901.


ТИПОГРАФІЯ М. СТАСЮЛЕВИЧА

ОГЛАВЛЕНІЕ.

КНИГА I.

Дополненіе къ элементарной алгебрѣ.

§ 1. Подъ *Дополненіемъ къ элементарной алгебрѣ* мы понимаемъ начальныя свѣдѣнія о рядахъ и ихъ сходимости, раскрытіе формулы бинома и ея приложенія, алгебраическую теорію логариѳмовъ и рѣшеніе показательныхъ уравненій.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Ряды.

I. Предварительныя понятія.

§ 2. Опредѣленія.—*Рядомъ* въ математикѣ называется безконечный рядъ количествъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по опредѣленному закону. Эти количества суть *члены* ряда.

Мы будемъ обозначать члены ряда черезъ u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ... Членъ u_n считается *общимъ членомъ*: значеніе его зависитъ отъ n, придавая которому послѣдовательныя значенія: 0,1,2, ..., мы будемъ получать различные члены ряда.

Черезъ S_n обозначаютъ алгебраическую сумму n первыхъ членовъ ряда, такъ что

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}.$$

§ 3. Сходящіеся и расходящіеся ряды. — Рядъ называется *сходящимся*, если существуетъ конечный предѣлъ, къ которому стремится

сумма S_n по мѣрѣ того, какъ n увеличивается безпредѣльно. Предѣлъ S, къ которому стремится S_n, называется *суммою* ряда.

Если же, напротивъ, сумма S_n не стремится къ опредѣленному предѣлу, то рядъ называется *расходящимся*. Расходящійся рядъ ничего не представляетъ и не можетъ, поэтому, имѣть приложенія въ анализѣ.

§ 4. Примѣръ.—Геометрическая прогрессія есть сходящійся рядъ, если ея знаменатель меньше единицы. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли (I, **§ 348**), что при $q<1$ сумма

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^n+\ldots$$

стремится къ опредѣленному предѣлу $\frac{a}{1-q}$.

Безконечная геометрическая прогрессія при знаменателѣ, большемъ единицы, есть рядъ расходящійся. Дѣйствительно, сумма ея членовъ безконечно растетъ при безконечномъ возрастаніи числа членовъ.

§ 5. Замѣчаніе.—*Чтобы рядъ былъ сходящимся, необходимо, чтобы, начиная съ нѣкотораго достаточно удаленнаго члена, членъ u_n стремился къ нулю при безконечномъ возрастаніи n.* Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ сходящійся и предѣлъ его равенъ S, то можно выбрать n на столько большимъ, что суммы: S_n, S_{n+1}, S_{n+2} будутъ отличаться отъ S на сколь-угодно малую величину. Разности: $S_{n+1}-S_n$, $S_{n+2}-S_{n+1}$ въ этомъ случаѣ будутъ также сколь-угодно малы. А такъ какъ $S_{n+1}-S_n=u_n$, $S_{n+2}-S_{n+1}=u_{n+1}$, то и члены: u_n, u_{n+1} стремятся къ нулю.

Это условіе—необходимо, но не достаточно. Для доказательства этого разсмотримъ рядъ, называемый *гармоническимъ*,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{1}$$

члены котораго безпредѣльно уменьшаются, а рядъ, несмотря на это,—расходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, собирая члены въ группы:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\ldots,$$

замѣчаемъ, что каждая часть, заключенная въ скобки, больше

$\frac{1}{2}$; дѣйствительно, въ послѣдней, напр., группѣ, состоящей изъ n членовъ, эти послѣдніе или больше, или, по крайней мѣрѣ, равны $\frac{1}{2n}$. А такъ какъ рядъ состоитъ изъ безчисленнаго множества подобныхъ группъ, то сумма, очевидно, можетъ превзойти всякій напередъ заданный предѣлъ.

§ 6. Общее условіе сходимости рядовъ.—Это условіе сходимости ряда заключается въ слѣдующемъ.

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы можно было взять въ немъ число членовъ n, начиная съ перваго, на столько большое, чтобы сумма слѣдующихъ p членовъ,

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}, \tag{a}$$

при всякомъ p, сколь-угодно большомъ, была бы по абсолютной величинѣ меньше даннаго количества, какъ бы мало оно ни было, и стремилась бы къ нулю, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Это условіе—необходимо. Дѣйствительно, если рядъ сходящійся, то n можно выбрать на столько большимъ, что двѣ суммы: S_n и S_{n+p} при всякомъ p будутъ отличаться отъ ихъ общаго предѣла S на сколь-угодно малую величину (§ 3); поэтому, и ихъ разность, равная суммѣ (a), при такомъ значеніи n будетъ по абсолютной величинѣ меньше заданнаго числа, какъ бы мало оно ни было, и будетъ стремиться къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n.

Этого условія достаточно. Дѣйствительно, если оно выполнено, то для n можно выбрать нѣкоторое опредѣленное значеніе n', на столько большое, что сумма

$$u_{n'} + u_{n'+1} + u_{n'+2} + \ldots + u_{n'+p} \tag{b}$$

при всякомъ p, какъ бы велико оно ни было, по абсолютной величинѣ будетъ меньше сколь-угодно малаго напередъ заданнаго числа α; слѣдовательно, при этомъ значеніи n' сумма $S_{n'+p}$ будетъ заключаться между двумя постоянными числами: $S_{n'} - \alpha$ и $S_{n'} + \alpha$, такъ какъ сумма (b) содержится между $-\alpha$ и $+\alpha$. Отсюда вытекаетъ, что если это справедливо при всякомъ значеніи p, то *при всякомъ значеніи n, большемъ n', сумма S_n будетъ содержаться между тѣми же предѣлами и не можетъ расти безпредѣльно вмѣстѣ съ n.* Кромѣ того, при безграничномъ возрастаніи n' сумма (b) стремится къ нулю; поэтому, два числа: $S_{n'} - \alpha$ и $S_{n'} + \alpha$ безпредѣльно при-

ближаются другъ къ другу и сумма S_n будетъ имѣть одинъ конечный и опредѣленный предѣлъ. Итакъ, рядъ—сходящійся.

§ 7. Замѣчаніе.—Не всегда легко приложить предыдущій общій признакъ и рѣшить, будетъ ли данный рядъ сходящійся или расходящійся. Одинъ изъ пріемовъ, наиболѣе элементарныхъ, состоитъ въ сравненіи предложеннаго ряда съ другимъ такимъ рядомъ, о которомъ извѣстно, сходящійся онъ или расходящійся; такое сравненіе приводитъ къ нѣкоторымъ правиламъ, которыя даютъ возможность рѣшить вопросъ въ большинствѣ случаевъ. Сначала мы займемся рядами, у которыхъ всѣ члены—положительны.

II. Ряды съ положительными членами.

§ 8. Теорема I. — *Рядъ съ положительными членами—сходящійся, если, начиная съ извѣстнаго мѣста, отношеніе всякаго члена ряда къ предыдущему постоянно меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа, меньшаго единицы: было бы недостаточно, если бы это отношеніе оставалось бы постоянно меньше только единицы.*

Рядъ—расходящійся, если это отношеніе, начиная съ извѣстнаго мѣста, постоянно больше единицы.

1. Разсмотримъ рядъ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

Пусть, начиная съ члена u_n, отношеніе всякаго члена къ предыдущему постоянно меньше опредѣленнаго числа k, меньшаго единицы, т.-е. пусть

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k, \ \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k, \ldots,$$

или

$$u_{n+1} < ku_n, \ u_{n+2} < ku_{n+1}, \ u_{n+3} < ku_{n+2}, \ldots$$

Изъ этихъ неравенствъ вытекаетъ:

$$u_{n+1} < ku_n, \ u_{n+2} < k^2u_n, \ u_{n+3} < k^3u_n, \ldots,$$

а это показываетъ, что члены предложеннаго ряда, начиная съ u_{n+1}, меньше соотвѣтственныхъ членовъ убывающей геометрической прогрессіи:

$$ku_n + k^2u_n + k^3u_n + \ldots$$

Слѣдовательно, невозможно, чтобы ихъ сумма возрастала безпредѣльно. Поэтому, хотя сумма членовъ предложеннаго ряда и будетъ постоянно увеличиваться при безграничномъ увеличеніи числа членовъ, такъ какъ эти послѣдніе всѣ положительны, но все-таки не можетъ превзойти всякаго напередъ заданнаго числа. Отсюда заключаемъ, что она имѣетъ предѣлъ, равный наименьшему изъ чиселъ, которыхъ она не можетъ превзойти.

2. Если, начиная съ нѣкотораго мѣста, отношеніе всякаго члена къ предыдущему больше единицы, то очевидно, что члены идутъ возрастая и что, слѣдовательно, ихъ сумма возрастаетъ безпредѣльно. Рядъ—расходящійся.

Замѣчаніе.—Предыдущее доказательство не имѣло бы мѣста, если бы $k=1$. Въ этомъ случаѣ явилось бы сомнѣніе: рядъ могъ бы быть какъ сходящимся, такъ и расходящимся, что мы и увидимъ на примѣрахъ.

§ 9. Какъ прилагается предыдущая теорема.—Обыкновенно отношеніе одного изъ членовъ къ предыдущему стремится къ нѣкоторому предѣлу l, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Если l меньше единицы, то можно выбрать по произволу, между l и 1, опредѣленное число k; и такъ какъ отношеніе стремится къ l, то n можно взять на столько большимъ, что это отношеніе будетъ постоянно меньше k, которое въ свою очередь меньше 1. Слѣдовательно, *рядъ—сходящійся.*

Если l больше единицы, то также можно выбрать по произволу, между 1 и l, опредѣленное число k; и такъ какъ отношеніе приближается неограниченно къ l, то оно, наконецъ, будетъ съ нѣкотораго мѣста постоянно больше k, которое въ свою очередь больше единицы. Слѣдовательно, *рядъ—расходящійся.*

Если $l=1$, то вопросъ остается нерѣшеннымъ. Теоремы I недостаточно, чтобы судить о сходимости или расходимости ряда. Однако, *если отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ съ нѣкотораго мѣста всегда больше своего предѣла* 1, *то рядъ—расходящійся*; дѣйствительно, тогда члены съ нѣкотораго мѣста идутъ, постоянно возрастая, и такъ какъ они всѣ—положительны, то ихъ сумма можетъ превзойти всякое напередъ заданное количество

§ 10. Предѣлъ допускаемой ошибки.—Доказательство теоремы I даетъ возможность опредѣлить предѣлъ ошибки, когда мы при суммированіи сходящагося ряда останавливаемся на членѣ нѣко-

тораго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что, начиная съ члена u_i, отношеніе всякаго члена къ предыдущему будетъ постоянно меньше числа k, меньшаго единицы; члены: u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, ... будутъ (§ 8) соотвѣтственно меньше ku_i, k^2u_i, k^3u_i, ... и, слѣдовательно, сумма отбрасываемыхъ членовъ, когда мы останавливаемся на u_{i-1}, будетъ меньше $u_i + ku_i + k^2u_i + k^3u_i + \ldots$ или меньше $\frac{u_i}{1-k}$. Итакъ, обозначая допускаемую ошибку черезъ ε, мы получаемъ:

$$\varepsilon < \frac{u_i}{1-k}.$$

§ 11. Примѣры: 1) Данъ рядъ:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots \qquad (2)$$

Отношеніе $(n+1)$-го члена къ предыдущему есть $\frac{1}{n}$; предѣлъ этого отношенія равенъ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n. Слѣдовательно, рядъ — сходящійся. — Останавливаемся на членѣ $\frac{1}{1.2.3\ldots i}$; отношеніе всякаго изъ слѣдующихъ членовъ къ предыдущему постоянно меньше $\frac{1}{i+1}$; принимая $k = \frac{1}{i+1}$, находимъ, что допущенная ошибка

$$\varepsilon < \frac{1}{1.2.3\ldots i}\left(1 + \frac{1}{i}\right).$$

2) Въ гармоническомъ рядѣ (1) (§ 5) отношеніе n-го члена къ предыдущему есть $\frac{n-1}{n}$, или, что то же самое, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Оно всегда меньше 1, но предѣлъ его при безграничномъ возрастаніи n равенъ 1. Является сомнѣніе, но въ § 5-мъ было доказано при помощи особаго пріема, что этотъ рядъ—расходящійся.

3) Данъ еще рядъ:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \qquad (3)$$

Отношеніе n-го члена къ предыдущему есть $\frac{(n-1)^2}{n^2}$, или, что то же самое, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$; предѣлъ его также равенъ единицѣ. Теорема I, поэтому, не приложима. Если же мы разобьемъ члены на группы:

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{15^2}\right)+\ldots,$$

т.-е. такъ, чтобы каждая группа начиналась членомъ, знаменатель котораго есть степень 2, то значеніе первой группы будетъ меньше $\frac{1}{2^2}\times 2$, или $\frac{1}{2}$; значеніе второй группы—меньше $\frac{1}{4^2}\times 4$, или $\frac{1}{4}$; третьей группы—меньше $\frac{1}{8^2}\times 8$, или $\frac{1}{8}$; и т. д. Отсюда вытекаетъ, что сумма членовъ даннаго ряда меньше суммы членовъ убывающей геометрической прогрессіи: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, а это значитъ, что разсматриваемый рядъ—сходящійся.

§ 12. Случай, когда рядъ расположенъ по степенямъ перемѣнной.— Часто случается, что рядъ расположенъ по цѣлымъ и возрастающимъ степенямъ перемѣнной x. Если общій членъ u_n равенъ $A_n x^n$, то отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будетъ равно $\frac{A_{n+1}}{A_n}x$; обозначая же черезъ l предѣлъ, къ которому стремится отношеніе коэффиціентовъ $\frac{A_{n+1}}{A_n}$, когда n возрастаетъ безпредѣльно, мы можемъ представить предѣлъ, къ которому стремится отношеніе самихъ этихъ членовъ, въ видѣ lx. Поэтому, рядъ будетъ сходящійся, если (§ 9)

$$lx<1, \text{ или } x<\frac{1}{l}.$$

Итакъ, рядъ будетъ сходящимся, пока x будетъ меньше $\frac{1}{l}$, и расходящимся, когда x будетъ $>\frac{1}{l}$. Вопросъ останется нерѣшеннымъ, если x придать значеніе $\frac{1}{l}$.

Примѣры: 1) Данъ рядъ:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots \quad (4)$$

Коэффиціенты членовъ этого ряда суть члены ряда (2); поэтому, отношеніе коэффиціентовъ $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ равно $\frac{1}{n}$ и предѣлъ его $l=0$. Слѣдовательно, рядъ будетъ сходящимся при всякомъ значеніи x, меньшемъ $\frac{1}{0}$, т.-е. при какомъ-угодно x.

2) Данъ рядъ:

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (5)$$

Коэффиціенты членовъ этого ряда суть члены гармоническаго ряда (1); поэтому, отношеніе коэффиціентовъ есть $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ и предѣлъ его равенъ 1. Слѣдовательно, рядъ—сходящійся при всякомъ значеніи x, меньшемъ 1, и расходящійся при всякомъ значеніи x, большемъ 1. Вопросъ оставался бы нерѣшеннымъ при $x=1$, но мы уже видѣли (**§ 5**), что въ этомъ случаѣ рядъ—расходящійся.

§ 13. Теорема II.—*Рядъ съ положительными членами, общій членъ котораго есть u_n,—сходящійся, если $\sqrt[n]{u_n}$ при нѣкоторомъ значеніи n и при всѣхъ значеніяхъ, большихъ этого, будетъ меньше опредѣленнаго числа k, меньшаго единицы. Рядъ—расходящійся, если $\sqrt[n]{u_n}$ постоянно больше единицы.*

1. Если, начиная съ нѣкотораго значенія n, постоянно $\sqrt[n]{u_n}<k$, то получаются слѣдующія неравенства:

$$u_n<k^n,\ u_{n+1}<k^{n+1},\ u_{n+2}<k^{n+2},\ \ldots,$$

изъ которыхъ видно, что члены предложеннаго ряда, начиная съ u_n, меньше соотвѣтственныхъ членовъ убывающей геометрической прогрессіи:

$$k^n+k^{n+1}+k^{n+2}+k^{n+3}+\ldots$$

Отсюда заключаемъ, какъ и въ **§ 8**-мъ, что нашъ рядъ—сходящійся.

2. Если же, наоборотъ, начиная съ нѣкотораго значенія n, $\sqrt[n]{u_n}$ постоянно больше единицы, то и u_n постоянно больше единицы; иначе говоря, члены идутъ возрастая и ихъ сумма можетъ превзойти всякую данную величину.

Замѣчаніе.—Предыдущее доказательство не имѣло бы мѣста, если бы $k=1$. Въ этомъ случаѣ явилось бы сомнѣніе; вообще, нельзя было бы сказать, будетъ ли рядъ сходящимся или расходящимся.

§ 14. Какъ прилагается предыдущая теорема.—Такъ же, какъ и въ **§ 9**-мъ, доказывается, что если $\sqrt[n]{u_n}$ стремится къ нѣкоторому предѣлу l, меньшему 1, то рядъ—сходящійся; если же l больше единицы, то рядъ—расходящійся; наконецъ, если $l=1$, то является

неопредѣленность. Однако, если $\sqrt[n]{u_n}$, съ нѣкотораго мѣста постоянно больше своего предѣла 1, то рядъ—расходящійся.

§ 15. Предѣлъ допускаемой ошибки. —Въ томъ случаѣ, кода рядъ сходящійся, предыдущее доказательство даетъ возможность опредѣлить предѣлъ ошибки ε, когда мы останавливаемся на членѣ $u_{\nu-1}$. Очевидно, мы получимъ такое неравенство:

$$\varepsilon < \frac{k^\nu}{1-k},$$

гдѣ k есть высшій предѣлъ для $\sqrt[n]{u_n}$.

Замѣчаніе.—Предѣлы, отъ которыхъ по теоремамъ I и II зависитъ сходимость, непремѣнно равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, пусть данъ рядъ:

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

и пусть

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=k, \quad \lim\sqrt[n]{u_n}=k'.$$

Въ рядѣ:

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots$$

предѣлъ отношенія какого-нибудь члена къ предыдущему выразится черезъ kx и, слѣдовательно, рядъ будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли x меньше или больше $\frac{1}{k}$; корень же n-ой степени изъ общаго члена u_nx^n имѣетъ предѣломъ $k'x$ и, слѣдовательно, по теоремѣ II рядъ будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли x меньше или больше $\frac{1}{k'}$. Оба полученные результата согласны между собою, если только $k=k'$.

§ 16 Теорема III.—*Если члены ряда:*

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$$

идутъ, начиная съ перваго, постоянно уменьшаясь, то этотъ рядъ будетъ сходящимся или расходящимся одновременно съ рядомъ:

$$u_0+2u_1+4u_3+8u_7+16u_{15}+\ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ сначала, что первый рядъ—сходящійся. Очевидно, мы можемъ написать слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &= 2u_1,\\
4u_3 &< 2u_2 + 2u_3,\\
8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,\\
16u_{15} &< 2u_8 + 2u_9 + 2u_{10} + \ldots + 2u_{15},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Складывая по-членно эти неравенства, получаемъ:

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots < u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots + 2u_{15} + \ldots;$$

слѣдовательно, сумма нѣкотораго числа членовъ второго ряда меньше удвоенной суммы членовъ перваго, оканчивающейся членомъ съ тѣмъ же указателемъ. А такъ какъ, по предположенію, этотъ послѣдній рядъ—сходящійся, то второй рядъ и подавно сходящійся. Итакъ, изъ сходимости перваго вытекаетъ сходимость второго.

Предположимъ теперь, что первый рядъ—расходящійся. Группируя члены иначе, мы можемъ написать слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &> u_1 + u_2,\\
4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
8u_7 &> u_7 + u_8 + u_9 + \ldots + u_{14},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Складывая по-членно, получаемъ:

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \ldots > u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{14} + \ldots$$

Такимъ образомъ сумма нѣкотораго числа членовъ второго ряда больше суммы членовъ перваго, оканчивающейся членомъ съ удвоеннымъ указателемъ. А такъ какъ, по предположенію, этотъ послѣдній рядъ неопредѣленно возрастаетъ, то второй рядъ—расходящійся. Итакъ, изъ расходимости перваго вытекаетъ расходимость второго.

Это и требовалось доказать.

§ 17. Приложенія.—За первый рядъ примемъ слѣдующій:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots; \qquad (6)$$

тогда за второй придется принять рядъ:

$$1+2^{1-\alpha}+4^{1-\alpha}+8^{1-\alpha}+\ldots$$

Этотъ послѣдній рядъ есть геометрическая прогрессія со знаменателемъ $2^{1-\alpha}$; слѣдовательно, онъ—сходящійся, если α больше 1, и расходящійся, если α равно или меньше единицы. Итакъ, первый рядъ —сходящійся, если $\alpha>1$, и расходящійся, если $\alpha\leqslant 1$.

Эти результаты были уже нами получены для ряда (1), гдѣ $\alpha=1$, и для ряда (3), гдѣ $\alpha=2$.

Примемъ за первый рядъ слѣдующій:

$$1+\frac{1}{2(\log 2)^\alpha}+\frac{1}{3(\log 3)^\alpha}+\frac{1}{4(\log 4)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n(\log n)^\alpha}+\ldots; \qquad (7)$$

второй тогда будетъ:

$$1+\frac{1}{(\log 2)^\alpha}+\frac{1}{(\log 4)^\alpha}+\frac{1}{(\log 8)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(\log 2^n)^\alpha}+\ldots,$$

или, замѣчая, что $(\log 2^n)^\alpha=n^\alpha(\log 2)^\alpha$,

$$1+\frac{1}{(\log 2)^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots\right).$$

Рядъ же въ скобкахъ не что иное, какъ рядъ (6); поэтому, онъ—сходящійся при $\alpha>1$ и расходящійся при α равномъ или меньшемъ 1. Слѣдовательно, то же заключеніе относится и къ ряду (7).

§ 18 Замѣчаніе.—Нѣтъ необходимости при приложеніи теоремы III начинать второй рядъ первымъ членомъ перваго ряда; дѣйствительно, сходимость ряда зависитъ только отъ членовъ, идущихъ въ безконечность. Такъ, напр., оставляя въ сторонѣ первыхъ i членовъ, разсмотримъ два ряда:

$$u_i+u_{i+1}+u_{i+2}+u_{i+3}+\ldots$$
$$u_i+2u_{i+1}+4u_{i+3}+8u_{i+7}+\ldots;$$

они будутъ одновременно сходящимися и расходящимися.

§ 19. Теорема IV.—*Рядъ съ положительными членами—сходящійся, если, начиная съ нѣкотораго члена, отношеніе логариѳма* $\frac{1}{u_n}$ *къ логариѳму n постоянно больше нѣкотораго опредѣленнаго числа* k, *большаго единицы. Рядъ расходящійся, если это отношеніе постоянно меньше единицы.*

1. Если отношеніе $\log \frac{1}{u_n}$ къ $\log n$ постоянно больше k, то отсюда вытекаетъ:

$$\log \frac{1}{u_n} > k \log n, \text{ или } \log \frac{1}{u_n} > \log n^k;$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{u_n} > n^k, \text{ или } u_n < \frac{1}{n^k}.$$

Такимъ образомъ члены предложеннаго ряда, начиная съ u_n, меньше соотвѣтственныхъ членовъ ряда:

$$\frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+2)^k} + \ldots;$$

этотъ же послѣдній—сходящійся, такъ какъ $k > 1$ (§ 17). Отсюда заключаемъ, что предложенный рядъ есть также сходящійся.

2. Если, наоборотъ, указанное отношеніе, начиная съ u_n, постоянно меньше единицы, то

$$\log \frac{1}{u_n} < \log n, \text{ или } \frac{1}{u_n} < n, \text{ или } u_n > \frac{1}{n}.$$

Такимъ образомъ члены предложеннаго ряда, начиная съ u_n, больше соотвѣтственныхъ членовъ ряда:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots;$$

этотъ же послѣдній—расходящійся (§ 5). Поэтому и предложенный рядъ также расходящійся.

§ 20. Какъ прилагается предыдущая теорема.—Обыкновенно отношеніе $\log \frac{1}{u_n}$ къ $\log n$ стремится къ нѣкоторому предѣлу l; въ такихъ случаяхъ, какъ и въ § 9-мъ, мы докажемъ, что рядъ—сходящійся, если l больше единицы, и что онъ—расходящійся, если l меньше единицы; наконецъ, будетъ неопредѣленность, когда $l = 1$. Однако, если разсматриваемое отношеніе съ нѣкотораго мѣста постоянно меньше своего предѣла 1, то рядъ—расходящійся.

§ 21. Замѣчанія. — Таковы наиболѣе элементарныя правила, при помощи которыхъ судятъ о сходимости рядовъ съ положительными членами. Есть и другія правила, излагать которыя мы

здѣсь не будемъ. Впрочемъ, мы сдѣлаемъ слѣдующихъ два замѣчанія, часто встрѣчающихся въ приложеніи.

1. *Если рядъ съ положительными членами—сходящійся, то онъ останется сходящимся и тогда, когда мы умножимъ всѣ его члены на одно и то же число, или даже на различныя числа, лишь бы только они были конечными.*

Въ самомъ дѣлѣ, если можно выбрать n на столько большимъ, что сумма:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}$$

будетъ какъ-угодно мала при всякомъ p и будетъ стремиться къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n (§ 6), то то же будетъ относиться и къ суммѣ:

$$A_n u_n + A_{n+1} u_{n+1} + A_{n+2} u_{n+2} + \ldots + A_{n+p-1} u_{n+p-1},$$

такъ какъ она меньше суммы:

$$A(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1}),$$

гдѣ A—наибольшій изъ введенныхъ коэффиціентовъ.

2. *Если рядъ:*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходящійся, а другой рядъ:

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

такой, что начиная съ нѣкотораго члена порядка i постоянно

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

то этотъ второй рядъ также сходящійся.

Дѣйствительно, если мы умножимъ первый рядъ на конечное число $\frac{v_i}{u_i}$, то получимъ новый рядъ, который по первому замѣчанію будетъ также сходящимся. А такъ какъ, начиная съ нѣкотораго члена v_i, члены этого новаго ряда,

$$v_i + v_i \frac{u_{i+1}}{u_i} + v_i \frac{u_{i+2}}{u_i} + \ldots,$$

больше соотвѣтственныхъ членовъ второго,

$$v_i + v_{i+1} + v_{i+2} + \ldots,$$

то этотъ послѣдній и подавно сходящійся.

III. Ряды частію съ положительными, частію съ отрицательными членами.

§ 22. Теорема I.—*Если не всѣ члены ряда—одного знака, то для сходимости его достаточно, чтобы былъ сходящимся другой рядъ, составленный изъ тѣхъ же членовъ, но взятыхъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ (напр. съ +).*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ нашъ рядъ, взятый съ положительными членами,—сходящійся, то n можно придать такое большое значеніе i, что начиная съ члена u_i сумма p слѣдующихъ будетъ сколь-угодно мала и будетъ стремиться къ нулю по мѣрѣ возрастанія i (§ 6). Тѣмъ болѣе это будетъ относиться къ алгебраической суммѣ соотвѣтственныхъ p членовъ предложеннаго ряда, потому что въ первомъ рядѣ всѣ эти члены прикладываются, а во второмъ одни прикладываются, другіе же вычитаются. Итакъ, предложенный рядъ—сходящійся (§ 6)

Слѣдовательно, и къ этимъ новымъ рядамъ можно приложить правила сходимости, данныя для рядовъ съ положительными членами, и точно такъ же найти предѣлъ ошибки, когда останавливаемся на членѣ какого-нибудь порядка. Но можетъ случиться и такъ, что рядъ, члены котораго—различныхъ знаковъ, будетъ сходящимся, а рядъ, составленный изъ тѣхъ же членовъ, но взятыхъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, будетъ расходящимся. Поэтому полезно дать правила, спеціально приложимыя къ этому случаю; мы ограничимся слѣдующимъ.

§ 23. Теорема II.—*Если члены ряда по-перемѣнно положительны и отрицательны и если они безпредѣльно убываютъ, то такой рядъ—сходящійся.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ данъ рядъ:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots,$$

въ которомъ члены: u_0, u_1, u_2, ... идутъ, постоянно уменьшаясь, такъ что каждый изъ нихъ меньше своего предыдущаго и u_n мо-

жетъ быть сдѣлано сколь-угодно малымъ при n достаточно большомъ.

Назовемъ черезъ S_0, S_1, S_2, . . . , S_n, . . . тѣ различныя суммы, которыя мы получимъ, останавливаясь послѣдовательно на членахъ: u_0, u_1, u_2, . . . , u_n, . . . Представимъ эти суммы на чертежѣ:

$$O \quad S_1 \quad S_3 \quad S_5 \quad S_7 \quad S \quad S_8 \quad S_6 \quad S_4 \quad S_2 \quad S_0 \quad X$$

Первая изъ нихъ, S_0, пусть будетъ изображена отрѣзкомъ OS_0. Вторая, S_1, равная $u_0 - u_1$, меньше S_0; изобразимъ ее отрѣзкомъ OS_1. Третья, S_2, равная $S_1 + u_2$, больше S_1; но она меньше S_0, потому что для ея составленія нужно къ S_0 прибавить отрицательное количество: $-u_1 + u_2$; изобразимъ ее, поэтому, отрѣзкомъ OS_2. Четвертая сумма, S_3, равная $S_2 - u_3$, меньше S_2; но она больше S_1, потому что для ея составленія нужно къ S_1 придать положительное количество: $u_2 - u_3$; изобразимъ ее, поэтому, отрѣзкомъ OS_3. И такъ далѣе. Отсюда видно, что суммы: S_1, S_3, S_5, . . . образуютъ возрастающій рядъ, а суммы: S_0, S_2, S_4, ... образуютъ убывающій рядъ. Кромѣ того, члены перваго ряда не увеличиваются безпредѣльно, такъ какъ всѣ они меньше каждаго изъ членовъ второго ряда, это вытекаетъ изъ самаго закона ихъ составленія. Отсюда очевидно, что эти члены имѣютъ предѣлъ, равный наименьшему изъ чиселъ, которыхъ они не могутъ превзойти. Точно такъ же члены убывающаго ряда, S_0, S_2, S_4, . . . , имѣютъ предѣлъ, потому что они больше каждаго изъ членовъ возрастающаго ряда; и этотъ предѣлъ превосходитъ всѣ тѣ числа, больше которыхъ постоянно остаются члены этого второго ряда. Наконецъ, эти два предѣла равны между собою; дѣйствительно, $S_{2n} - S_{2n-1} = u_{2n}$ и, слѣдовательно, разность между двумя соотвѣтственными членами обоихъ рядовъ съ четными и нечетными указателями можетъ быть сдѣлана сколь-угодно малою. Слѣдовательно, на прямой OX, между концами отрѣзковъ, изображающихъ S_{2n-1} и S_{2n}, будетъ безпредѣльно уменьшающееся разстояніе при безпредѣльномъ возрастаніи n, такъ что эти концы неограниченно приближаются къ точкѣ S, которая и будетъ ихъ общимъ предѣломъ. Отрѣзокъ OS представитъ *сумму* разсматриваемаго ряда.

§ 24. Предѣлъ допускаемой ошибки.—*Ошибка, когда мы останавливаемся на членѣ u_{n-1}, меньше слѣдующаго члена и одного съ нимъ знака.* Въ самомъ дѣлѣ, сумма S разсматриваемаго ряда очевидно содер-

жится между S_{i-1} и S_i. Слѣдовательно, допускаемая ошибка, когда мы S_i принимаемъ за приближенное значеніе S, меньше разности между S_i и S_{i-1}, равной $\pm u_i$. Итакъ, приближенныя значенія, которыя мы получаемъ при постепенномъ увеличеніи числа членовъ, по-перемѣнно то больше, то меньше истиннаго значенія, но ошибка, по абсолютной величинѣ, меньше перваго изъ отбрасываемыхъ членовъ.

§ 25. Примѣръ.—Данъ рядъ:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \ldots \qquad (8)$$

Отношеніе общаго члена къ предыдущему, по абсолютной величинѣ, есть $\frac{n}{n+1}x$, предѣлъ этого отношенія равенъ x. Поэтому, рядъ—сходящійся (**§§ 9** и **22**), если абсолютная величина x меньше единицы, и расходящійся, если x больше 1. Кромѣ того, какъ мы увидимъ дальше, члены въ этомъ случаѣ не уменьшаются безпредѣльно. Если $x = 1$, то рядъ — сходящійся (**§ 22**), дѣйствительно, онъ тогда преобразовывается въ слѣдующій.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

и члены его, будучи по-перемѣнно положительными и отрицательными, безпредѣльно убываютъ. Напротивъ, полагая $x = -1$, мы получимъ гармоническій и, слѣдовательно, расходящійся рядъ.

Наконецъ, если разсматриваемый рядъ — сходящійся, то ошибка ε, когда мы останавливаемся на членѣ $\frac{x^{n-1}}{n-1}$, меньше, по абсолютной величинѣ, $\frac{x^n}{n}$ и одного знака съ этимъ членомъ.

§ 26 Замѣчаніе. — Если рядъ, члены котораго частію положительны, частію отрицательны, — сходящійся независимо отъ знаковъ его членовъ, то его можно разсматривать, какъ разность между двумя сходящимися рядами, изъ которыхъ одинъ образованъ положительными членами, а другой—отрицательными. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ S_n сумму n первыхъ членовъ разсматриваемаго ряда и черезъ $S'_{n'}$ и $S''_{n''}$ суммы положительныхъ и отрицательныхъ членовъ, содержащихся среди этихъ n членовъ, можемъ написать:

$$S_n = S'_{n'} - S''_{n''}.$$

По мѣрѣ же возрастанія n, и вмѣстѣ съ нимъ n' и n'', эти три сходящіяся суммы одновременно стремятся къ своимъ предѣламъ: S, S', S''.

Но нужно остерегаться распространять это замѣчаніе на ряды, расходящіеся въ томъ случаѣ, когда всѣ ихъ члены дѣлаются положительными. Это привело бы насъ къ большимъ ошибкамъ. Вотъ одинъ замѣчательный примѣръ.

Гармоническій рядъ (1) — расходящійся, а рядъ:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots, \qquad (9)$$

составленный изъ тѣхъ же членовъ, но взятыхъ по-перемѣнно то съ $+$, то съ $-$, сходящійся (§ **23**), потому что члены его идутъ, безпредѣльно уменьшаясь. Далѣе мы увидимъ, что сумма этого ряда есть неперовъ логариѳмъ 2 (§ **157**).

Измѣнимъ теперь порядокъ членовъ и напишемъ:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\ldots; \qquad (10)$$

казалось бы, что написано то же самое, такъ какъ оба ряда, (9) и (10), имѣютъ одни и тѣ же положительные члены: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ и одни и тѣ же отрицательные: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ Однако, ихъ суммы — различны. Въ самомъ дѣлѣ, не измѣняя порядка членовъ въ рядѣ (9), соберемъ ихъ въ группы, по четыре члена въ каждой; тогда n-ая группа будетъ:

$$\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}; \qquad (\alpha)$$

сумму же s этого ряда мы получимъ, составляя сумму значеній, принимаемыхъ этою группою, когда станемъ придавать n всевозможныя цѣлыя значенія. Также собираемъ въ группы члены ряда (10), по три члена въ каждой; n-ая группа будетъ:

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}; \qquad (\beta)$$

сумму же s' этого ряда мы получимъ, составляя сумму значеній, принимаемыхъ этою группою, когда станемъ придавать n всевоз-

можныя цѣлыя значенія. А такъ какъ избытокъ группы (β) надъ группою (α), очевидно, равенъ

$$\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}\text{, или }\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\text{,}$$

или, наконецъ,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), \qquad (\gamma)$$

то при всякомъ n будетъ справедливо равенство:

$$\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Придавая теперь въ этомъ тождествѣ числу n послѣдовательно значенія: 1, 2, 3, . . . , n и складывая по-членно получаемые результаты, напишемъ равенство:

$$\sum\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\sum\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

справедливое при всякомъ n. Предположимъ, наконецъ, что n возрастаетъ безпредѣльно; тогда первая сумма будетъ имѣть предѣломъ s', а вторая s. Что же касается послѣдней суммы, то она также будетъ имѣть предѣломъ s, потому что $\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$ есть n-ая группа ряда (9), если собирать тамъ въ группы по два члена. Итакъ,

$$s'=s+\frac{1}{2}s,$$

откуда

$$s'=\frac{3}{2}s.$$

Такимъ образомъ сумма ряда (10) есть $\frac{3}{2}$ суммы ряда (9). Слѣдовательно, нельзя измѣнять порядокъ членовъ въ рядѣ, если послѣдній не есть сходящійся независимо отъ знаковъ его членовъ.

Да и въ самомъ дѣлѣ, понятно, что въ случаѣ ряда (9), какъ сумма положительныхъ его членовъ, такъ и сумма отрицательныхъ, — безконечна; такъ что сумма такого ряда является

разностью двухъ безконечностей, т. е. количествомъ совершенно неопредѣленнымъ, истинное значеніе котораго должно зависѣть отъ закона, по которому идутъ члены въ обоихъ рядахъ одновременно.

IV. Объ одномъ замѣчательномъ рядѣ.

§ 27. Опредѣленіе e.— Изъ рядовъ, употребляемыхъ въ анализѣ, одинъ особенно замѣчателенъ, именно рядъ:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\cdots \qquad (2)$$

Мы видѣли (§ 11), что этотъ рядъ — сходящійся и что, если остановиться, при суммированіи членовъ, на членѣ $\frac{1}{1.2.3\ldots i}$, то происшедшая при этомъ ошибка будетъ менѣе $\left(1+\frac{1}{i}\right)\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots i}$. Сумму этого ряда обозначаютъ черезъ e.

Сумма e содержится между 2 и 3. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что она больше 2; для доказательства же, что она меньше 3, достаточно показать, что

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}<1,$$

неравенство это — очевидно, если замѣтить, что члены первой его части меньше членовъ одинаковаго съ ними порядка убывающей прогрессіи:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

сумма которой равна $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$, т.-е. 1.

§ 28. Разсматриваемый рядъ — несоизмѣримъ. — Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, если это—возможно, что

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots q}+\frac{1}{1.2.3\ldots q(q+1)}+\cdots,$$

гдѣ p и q — цѣлыя. Умножимъ обѣ части этого равенства на про-

изведеніе $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots q$; тогда первая часть и $(q+1)$ первыхъ членовъ второй части станутъ цѣлыми числами; обозначая сумму этихъ послѣднихъ черезъ N, мы можемъ написать:

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (q-1) p =$$
$$= N + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$

Здѣсь сумма членовъ, слѣдующихъ за N, меньше суммы членовъ убывающей прогрессіи:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots,$$

т.-е. меньше $\frac{1}{q}$; слѣдовательно, она представляетъ несомнѣнную дробь. Такимъ образомъ, цѣлое число является равнымъ суммѣ цѣлаго числа и дроби, а это—невозможно. Отсюда заключаемъ, что рядъ e не можетъ быть равенъ дроби $\frac{p}{q}$, т.-е. онъ—несоизмѣримъ.

§ 29. Вычисленіе e съ 20 цифрами послѣ запятой. — Вычислить e въ видѣ десятичной дроби можно только съ приближеніемъ (§ 28). Первую ошибку вводятъ, останавливаясь, при суммированіи ряда, на членѣ нѣкотораго порядка и отбрасывая всѣ слѣдующіе за нимъ. Вторую ошибку вводятъ, обращая въ десятичныя дроби сохраненные члены; дѣйствительно, ни одинъ изъ нихъ, если не считать трехъ первыхъ, не обращается точно въ десятичную дробь. А такъ какъ

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 20} < \frac{412}{10^{21}}, \quad \frac{1}{1.2.3\ldots 21} < \frac{20}{10^{21}},$$

то первая ошибка, если мы останавливаемся на 22-мъ членѣ, меньше (§ 27) $\frac{1}{21}$ отъ $\frac{20}{10^{21}}$, т.-е. меньше $\frac{1}{10^{21}}$. Поэтому, если вычислить каждый изъ 19 членовъ, слѣдующихъ за первыми тремя, съ 22 цифрами послѣ запятой, то вторая ошибка будетъ меньше 19 единицъ 22-го разряда послѣ запятой и, слѣдовательно, меньше $\frac{2}{10^{21}}$. Итакъ, вся ошибка будетъ меньше $\frac{3}{10^{21}}$, а отсюда вытекаетъ, что она и подавно меньше единицы 20-го разряда послѣ запятой. Приводимъ значенія этихъ 22 членовъ съ 22 цифрами послѣ запятой:

2.				
0.5				
0,16666	66666	66666	66666	66
0,04166	66666	66666	66666	66
0,00833	33333	33333	33333	33
0,00138	88888	88888	88888	88
0,00019	84126	98412	69841	26
0.00002	48015	87301	58730	15
0,00000	27557	31922	39858	90
0,00000	02755	73192	23985	89
0,00000	00250	52108	38544	17
0,00000	00020	87675	69878	68
0,00000	00001	60590	43836	82
0,00000	00000	11470	74559	77
0,00000	00000	00764	71637	31
0,00000	00000	00047	79477	33
0,00000	00000	00002	81145	72
0,00000	00000	00000	15619	20
0,00000	00000	00000	00822	06
0,00000	00000	00000	00041	10
0,00000	00000	00000	00001	95
2,71828	18284	59045	23535	84

Итакъ,

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ldots$$

КОНСПЕКТЪ.

§ 1. Что понимаютъ подъ дополненіемъ къ элементарной Алгебрѣ.—§ 2 Что называется рядомъ; общій членъ ряда.—§ 3. Что называется сходящимся или расходящимся рядомъ; сумма сходящагося ряда.—§ 4. Геометрическая прогрессія есть сходящійся рядъ, если ея знаменатель меньше единицы, и расходящійся въ противномъ случаѣ.—§ 5. Чтобы рядъ былъ сходящимся, необходимо, чтобы его члены убывали безпредѣльно; но этого условія недостаточно.—§ 6. Общее условіе сходимости рядовъ.—§ 7. Обычный пріемъ рѣшенія вопроса, будетъ ли данный рядъ сходящійся.—§ 8. Рядъ съ положительными членами—сходящійся, если, начиная съ извѣстнаго мѣста, отношеніе всякаго члена ряда къ предыдущему меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа, меньшаго единицы.—§ 9. Какъ прилагается предыдущая теорема, если это отношеніе имѣетъ предѣлъ.—§ 10. Предѣлъ допускаемой ошибки, когда останавливаются на нѣкоторомъ членѣ.—§ 11. Приложенія.—§ 12 Случай, когда рядъ расположенъ по степенямъ перемѣнной.—§ 13. Рядъ съ положительными членами—

сходящійся, если $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго мѣста, будетъ меньше опредѣленнаго числа k, меньшаго единицы.—§ 14. Какъ прилагается предыдущая теорема.—§ 15. Предѣлъ допускаемой ошибки.—§ 16. Если члены нѣкотораго ряда: $u_0+u_1+u_2+\ldots$ идутъ, постоянно уменьшаясь, то этотъ рядъ будетъ сходящимся или расходящимся одновременно съ рядомъ: $u_0+2u_1+4u_3+8u_7+\ldots$— § 17. Приложенія.—§ 18. Замѣчаніе.—§ 19. Рядъ—сходящійся, если, начиная съ нѣкотораго мѣста, отношеніе $\log\frac{1}{u_n}$ къ $\log n$ постоянно больше нѣкотораго опредѣленнаго числа k, большаго 1.—§ 20. Какъ прилагается предыдущая теорема.— § 21. Замѣчанія.—§ 22. Если не всѣ члены ряда—положительны, то онъ будетъ сходящимся, если будетъ сходящимся рядъ, составленный изъ тѣхъ же членовъ, но взятыхъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ. § 23. Рядъ, члены котораго по-перемѣнно положительны и отрицательны, — сходящійся, если его члены безпредѣльно убываютъ.—§ 24. Предѣлъ допускаемой ошибки.—§ 25. Приложеніе.—§ 26. Не всегда можно разсматривать рядъ, какъ разность между суммою положительныхъ его членовъ и суммою отрицательныхъ. Замѣчательный примѣръ.—§ 27. Опредѣленіе ряда e.—§ 28. e—несоизмѣримо. § 29. Вычисленіе e съ 20 цифрами послѣ запятой.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Пользуясь теоремою II (§ 13), показать, что рядъ:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

сходящійся.

II. Если рядъ: $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ сходящійся, то рядъ:

$$E_0u_0+E_1u_1+\ldots+E_nu_n+\ldots,$$

въ которомъ $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ убывающія положительныя числа, также сходящійся, каковы бы ни были знаки его членовъ.

III. Показать, что рядъ:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

сходящійся и что его предѣлъ есть 1.

IV. Показать, что рядъ:

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\ldots+\frac{1}{2n(2n+2)}+\ldots$$

сходящійся и что его предѣлъ есть $\frac{1}{4}$.

V. Имѣемъ тождество:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \dots;$$

вывести отсюда, что

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} + \dots$$

VI. Показать, что рядъ:

$$\frac{1}{2\log 2(\log\log 2)^\alpha} + \frac{1}{3\log 3(\log\log 3)^\alpha} + \dots + \frac{1}{n\log n(\log\log n)^\alpha} + \dots$$

сходящійся при $\alpha > 1$ и расходящійся при $\alpha \leqq 1$.

Прилагается теорема III (§ 16).

VII. Показать, что два ряда:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$
$$au_a + a^2 u_{a^2} + a^3 u_{a^3} + \dots + a^n u_{a^n} + \dots$$

одновременно сходящіеся или расходящіеся (Это правило дано Cauchy).

Эта теорема есть обобщеніе теоремы III (§ 16) и доказывается подобнымъ же образомъ.

VIII. Показать, что рядъ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходящійся, если, начиная съ нѣкотораго мѣста, отношеніе $\log \frac{1}{nu_n}$ къ логарифму $\log n$ стремится къ предѣлу, большему 1, и расходящійся, если это отношеніе стремится къ предѣлу, меньшему 1.

IX. Если въ рядѣ отношеніе всякаго члена къ предыдущему представляется въ видѣ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + An^{p-1} + Bn^{p-2} + Cn^{p-3} + \dots}{n^p + an^{p-1} + bn^{p-2} + cn^{p-3} + \dots}, \tag{α}$$

гдѣ p—цѣлое и положительное число, а $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots$ суть данныя постоянныя числа, то 1) члены растутъ безпредѣльно, если $A - a > 0$, и неопредѣленно убываютъ, если $A - a < 0$.

Предложенный рядъ сравнивается съ другимъ, общій членъ котораго $v_n = \frac{(u_n)^h}{n}$, гдѣ h—положительное надлежащимъ образомъ выбранное число.

2) Если $A - a = 0$, члены возрастаютъ, не переходя нѣкотораго предѣла, при $B - b > 0$; они уменьшаются, не достигая нуля, при $B - b < 0$. Въ этомъ случаѣ сходимость—невозможна.

Предложенный рядъ сравнивается съ другимъ, общій членъ котораго

$v_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^h u_n$, гдѣ h — положительное надлежащимъ образомъ выбранное число; члены этого послѣдняго ряда больше членовъ перваго и идутъ, уменьшаясь, при $B - b > 0$

3) Если $A - a < 0$, но $A - a + 1 \leqslant 0$, рядъ—расходящійся.

Предложенный рядъ сравнивается съ расходящимся рядомъ, общій членъ котораго $v_n = u_n(n-h)$, гдѣ h—выбранное надлежащимъ образомъ число.

4) Рядъ—сходящійся, если $A - a + 1 > 0$

Въ этомъ случаѣ доказывается, что $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n-h-1}{n}$, гдѣ h — положительное и надлежащимъ образомъ выбранное число, и что, слѣдовательно, $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$ меньше

$$u_n\left[1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)(n+2)} + \dots\right].$$

Доказывается, наконецъ, что $(p + 2)$ первыхъ членовъ ряда, заключеннаго въ скобки, имѣютъ въ суммѣ

$$\frac{n-1}{n} - \frac{(n-h-1)(n-h)\dots(n-h+p)}{hn(n+1)\dots(n+p)},$$

что этотъ рядъ — сходящійся и имѣетъ въ предѣлѣ $\frac{n-1}{h}$, когда p возрастаетъ безпредѣльно.

Отсюда вытекаетъ, что для сходимости ряда, когда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ можетъ быть представлено подъ видомъ раціональной дроби (a), *необходимо и достаточно*, чтобы $(A - a + 1)$ было больше нуля; сомнительныхъ случаевъ нѣтъ. Это правило дано Гауссомъ.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Соединенія и формула бинома

I. Соединенія.

§ 30. Опредѣленія.—*Соединеніями* изъ m различныхъ предметовъ по n называются различныя группы, какія можно составить, беря для каждой изъ нихъ n изъ этихъ предметовъ; полезно найти ихъ число.

Вопросъ можетъ быть разсматриваемъ съ двухъ точекъ зрѣнія, смотря по тому, принимаются ли за различныя, или нѣтъ, группы, составленныя изъ однихъ и тѣхъ же предметовъ и различающіяся между собою только мѣстомъ расположенія этихъ послѣднихъ.

Въ первомъ случаѣ соединенія называются *размѣщеніями* (*arrangements*), а во второмъ -*сочетаніями* (*produits defférents*).

§ 31. Число размѣщеній. — Найдемъ сначала число различныхъ размѣщеній изъ m предметовъ по n. Обозначимъ это число черезъ A_n, а число размѣщеній изъ тѣхъ же предметовъ по $(n-1)$ черезъ A_{n-1}. Еслибы были составлены всѣ размѣщенія по $(n-1)$, то, приписывая въ послѣдовательномъ порядкѣ къ каждому изъ нихъ остальные $[m-(n-1)]$ предметовъ, мы составили бы всѣ размѣщенія по n; число ихъ было бы

$$A_{n-1}[m-(n-1)], \text{ или } A_{n-1}(m-n+1),$$

потому что каждое размѣщеніе по $(n-1)$ даетъ по этому способу $[m-(n-1)]$ размѣщеній по n. Можно утверждать, что $A_{n-1}[m-(n-1)]$ выражаетъ точно число всѣхъ размѣщеній по n; для этого нужно показать, что такимъ путемъ будутъ составлены всѣ размѣщенія по n и что среди составленныхъ каждое такое размѣщеніе встрѣтится только одинъ разъ:

1. Что составлены всѣ размѣщенія по n, это слѣдуетъ изъ того, что каждое такое размѣщеніе, состоящее изъ n предметовъ, мы можемъ получить, присоединяя послѣдній изъ нихъ къ одному изъ размѣщеній по $(n-1)$.

2. Одно и то же размѣщеніе можетъ войти только одинъ разъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ различны между собою всѣ размѣщенія по $(n-1)$, такъ различны между собою и тѣ $(m-n+1)$ предметовъ, которые мы ставимъ въ концѣ каждаго изъ упомянутыхъ размѣщеній; а отсюда вытекаетъ, что и новыя группы будутъ различаться или по группѣ $(n-1)$ первыхъ предметовъ, если онѣ произошли отъ двухъ различныхъ размѣщеній по $(n-1)$, или же послѣднимъ предметомъ, если онѣ произошли отъ одного и того же размѣщенія по $(n-1)$.

Итакъ, мы можемъ написать:

$$A_n = (m-n+1)A_{n-1}.$$

Это соотношеніе выведено для какого-угодно значенія n; поэтому, обозначая черезъ A_{n-2}, $A_{n-3}, \ldots, A_1$ соотвѣтственно числа размѣщеній по $(n-2)$, по $(n-3), \ldots,$ по 1, мы составимъ рядъ слѣдующихъ равенствъ:

$$A_{n-1} = (m - n + 2) A_{n-2},$$
$$A_{n-2} = (m - n + 3) A_{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_2 = (m - 1) A_1.$$

Перемножая ихъ по-членно, сокращая обѣ части вновь полученнаго равенства на множителей A_{n-1}, A_{n-2}, ..., A_2 и замѣчая, что число A_1 размѣщеній по 1 равно m, мы можемъ написать:

$$A_n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1). \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, *число размѣщеній изъ m различныхъ предметовъ по n равно произведенію n цѣлыхъ множителей, послѣдовательныхъ и уменьшающихся, начиная съ m.*

§ 32. Число перестановокъ. — Предыдущая формула при $n = m$ даетъ число размѣщеній изъ m буквъ по m. Такія размѣщенія, въ каждое изъ которыхъ входятъ всѣ буквы, называются *перестановками* (*permutations*). Обозначая число ихъ черезъ P_m, мы можемъ написать:

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m, \qquad (2)$$

такъ какъ при $m = n$ множитель $(m - n + 1)$ обращается въ единицу.

Такимъ образомъ, *число перестановокъ изъ m различныхъ предметовъ равно произведенію m первыхъ цѣлыхъ чиселъ.*

§ 33. Число сочетаній. — Сочетаніями (produits différents или *combinaisons*) изъ m предметовъ по n называются всѣ группы, какія можно составить изъ этихъ m предметовъ, принимая за тождественныя тѣ изъ нихъ, которыя различаются между собою только порядкомъ предметовъ.

Назовемъ черезъ C_n число *этихъ сочетаній*. Допустимъ, что всѣ они у насъ составлены; дѣлаемъ въ каждомъ изъ нихъ всевозможныя *перестановки* между n входящими туда предметами: получатся *размѣщенія* изъ m данныхъ предметовъ по n. Можно утверждать, что такимъ путемъ будутъ составлены всѣ размѣщенія и каждое встрѣтится только одинъ разъ:

1. Размѣщенія будутъ составлены всѣ; дѣйствительно, предметы, образующіе какое-нибудь изъ размѣщеній, независимо отъ порядка самихъ предметовъ, образуютъ въ то же время и одно изъ сочетаній; а если сдѣлать *всевозможныя* перестановки предметовъ въ

этомъ сочетаніи, то среди составленныхъ такимъ образомъ группъ встрѣтится и разсматриваемое размѣщеніе.

2. Каждое размѣщеніе войдетъ только одинъ разъ: дѣйствительно, размѣщенія, происходящія отъ одного и того же сочетанія, различаются порядкомъ предметовъ; тѣ же, которыя происходятъ отъ двухъ различныхъ сочетаній, состоятъ не изъ однихъ и тѣхъ же предметовъ.

Итакъ, можно получить всѣ размѣщенія, дѣлая всевозможныя перестановки въ каждомъ изъ сочетаній. А такъ какъ каждое сочетаніе дастъ въ этомъ случаѣ $1.2.3 \ldots n$ различныхъ размѣщеній, то все число размѣщеній A_n будетъ равно числу сочетаній C_n, умноженному на $1.2.3 \ldots n$, т.-е.

$$A_n = C_n . 1. 2. 3. \ldots n,$$

откуда, при замѣнѣ A_n его значеніемъ (1), получаемъ:

$$C_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ, *число сочетаній изъ m предметовъ по n равно частному отъ дѣленія произведенія n цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательныхъ и уменьшающихся, начиная съ m, на произведеніе n первыхъ цѣлыхъ чиселъ.*

§ 34. Замѣчаніе I.—Предыдущая формула можетъ быть представлена въ другомъ видѣ, болѣе удобномъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, умножая числителя и знаменателя предыдущей дроби, выражающей значеніе C_n, на $1.2.3\ldots(m-n)$, получаемъ:

$$C_n = \frac{1.2.3\ldots(m-n)(m-n+1)(m-n+2)\ldots m}{1.2\ldots n.1.2\ldots(m-n)}; \qquad (4)$$

здѣсь, въ числителѣ стоитъ произведеніе цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до m, а въ знаменателѣ—произведеніе цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до $(m-n)$ и произведеніе цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до n.

Замѣчаніе II.—Формула (4), очевидно, не измѣнится, если въ ней на мѣсто n подставить $(m-n)$; при такой подстановкѣ все измѣненіе ограничится переходомъ одного въ другой множителей знаменателя: $1.2\ldots n$ и $1.2\ldots(m-n)$.

Слѣдовательно, число сочетаній изъ m предметовъ по n равно числу сочетаній изъ m предметовъ по $(m-n)$.

Равенство этихъ двухъ чиселъ очевидно и *à priori*. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ m предметовъ выдѣлить группу въ n предметовъ, то останется группа въ $(m-n)$ предметовъ; такимъ образомъ каждой группѣ или, что то же самое, сочетанію по n предметовъ соотвѣтствуетъ сочетаніе по $(m-n)$, а это значитъ, что числа тѣхъ и другихъ сочетаній одинаковы.

§ 35. Замѣчаніе III.—*Число сочетаній изъ m предметовъ по n равно суммѣ чиселъ сочетаній изъ $(m-1)$ предметовъ по n и изъ $(m-1)$ предметовъ по $(n-1)$.* Въ самомъ дѣлѣ, можно сочетаніе изъ m предметовъ по n раздѣлить на двѣ группы: въ одну изъ нихъ войдутъ сочетанія, не содержащія какого-нибудь одного предмета, а въ другую—остальныя. Первыя представятъ, очевидно, всѣ сочетанія изъ $(m-1)$ предметовъ по n, вторыя же, если въ нихъ опустить вышеупомянутый предметъ, явятся сочетаніями изъ $(m-1)$ по $(n-1)$.

Впрочемъ, эта теорема доказывается непосредственно при помощи формулы (3).

§ 36. Замѣчаніе IV.—Число C_n непремѣнно цѣлое; слѣдовательно, формула (3) доказываетъ, что *произведеніе n цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе n первыхъ цѣлыхъ чиселъ.*

II. Формула бинома Ньютона.

§ 37. Произведенія m биномовъ, различающихся вторымъ членомъ.—Мы видѣли (I, § 42), что произведеніе какого-нибудь числа многочленовъ есть сумма всевозможныхъ произведеній такихъ, въ каждое изъ которыхъ входятъ, какъ множители, по одному члену изъ каждаго многочлена.

Прилагаемъ это правило къ составленію произведенія m биномовъ съ однимъ и тѣмъ же первымъ членомъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l).$$

Если расположить это произведеніе по убывающимъ степенямъ x, то первымъ членомъ, очевидно, будетъ x^m, происходящій отъ перемноженія m первыхъ членовъ биномовъ.

Членъ, содержащій x^{m-1}, представитъ сумму произведеній, въ каждое изъ которыхъ войдутъ, какъ множители, первые члены

$(m-1)$ биномовъ и послѣднiй членъ оставшагося бинома; слѣдовательно, коэффицiентомъ при x^{m-1} будетъ сумма вторыхъ членовъ нашихъ биномовъ.

Членъ, содержащiй x^{m-2}, представитъ сумму произведенiй, въ каждое изъ которыхъ войдутъ, какъ множители, первые члены $(m-2)$ биномовъ и послѣднiе члены двухъ остальныхъ биномовъ; слѣдовательно, коэффицiентомъ при x^{m-2} будетъ сумма произведенiй по два вторыхъ членовъ нашихъ биномовъ.

Точно также коэффицiентомъ при x^{m-3} будетъ сумма произведенiй по три вторыхъ членовъ и, вообще, коэффицiентомъ при x^{m-n} будетъ сумма произведенiй тѣхъ же членовъ по n.

Этотъ результатъ пишется часто въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)=$$
$$=x^m+x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab+x^{m-3}\Sigma abc+\ldots+x^{m-p}\Sigma abc\ldots p+\ldots+abc\ldots kl, \quad (1)$$

гдѣ Σa, Σab, Σabc,... обозначаютъ сумму вторыхъ членовъ, сумму ихъ произведенiй по два, по три, и т. д.

§ 38. Формула бинома.—Чтобы вывести изъ предыдущаго выраженiе для $(x+a)^m$, достаточно положить $a=b=c=\ldots=l$, тогда разложенiе значительно упростится.

Первый членъ x^m останется безъ измѣненiя.

Коэффицiентъ при x^{m-1}, равный суммѣ вторыхъ членовъ, превратится въ ma.

Коэффицiентъ при x^{m-2}, равный суммѣ произведенiй вторыхъ членовъ по два, превратится въ a^2, умноженное на число этихъ произведенiй, т.-е. (§ 33) въ

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2.$$

Коэффицiентъ при x^{m-3}, равный суммѣ произведенiй вторыхъ членовъ по три, превратится въ a^3, умноженное на число этихъ произведенiй, т.-е. въ

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3.$$

Вообще, коэффицiентъ при x^{m-p}, равный суммѣ произведенiй вторыхъ членовъ по p, превратится въ a^p, умноженное на число этихъ произведенiй, т.-е. въ

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}a^p.$$

Слѣдовательно,

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}a^px^{m-p} + \ldots + a^m. \qquad (2)$$

Это и есть *формула бинома Ньютона.*

§ 39. Замѣчаніе I. — Мы замѣчаемъ, что въ разложеніи $(x+a)^m$ показатель при x уменьшается постепенно на единицу, начиная съ m до нуля, а коэффиціентъ при a увеличивается постепенно на единицу, начиная съ 0 до m, такъ что въ каждомъ членѣ сумма обоихъ показателей постоянна и равна m. Число членовъ разложенія есть $(m+1)$.

Общимъ членомъ называется $(n+1)$-ый по порядку; обозначая его черезъ T_n, можемъ написать:

$$T_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n}. \qquad (3)$$

§ 40. Замѣчаніе II. — Обозначая черезъ T_{n-1} предшествующій членъ, находимъ:

$$T_n = T_{n-1} \times \frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x}. \qquad (4)$$

А такъ какъ $(m-n+1)$ есть показатель при x въ T_{n-1}, а n есть число, показывающее, какое мѣсто занимаетъ этотъ членъ, то, слѣдовательно, *чтобы перейти отъ члена порядка n къ члену порядка $(n+1)$, умножаютъ его коэффиціентъ на показателя при x въ этомъ членѣ и дѣлятъ на число, показывающее его порядокъ, затѣмъ увеличиваютъ на единицу показатель при a и уменьшаютъ на единицу показатель при x.*

§ 41. Замѣчаніе III. — Коэффиціентъ при a^px^{m-p} есть число сочетаній изъ m буквъ по p, коэффиціентъ же при $a^{m-p}x^p$ есть число сочетаній изъ m буквъ по $(m-p)$; а такъ какъ эти числа равны (§ 34), то, слѣдовательно, *въ разложеніи $(x+a)^m$ коэффиціенты членовъ, равно удаленныхъ отъ концовъ, равны.*

§ 42. Замѣчаніе IV. — Отношеніе коэффиціента T_n къ коэффиціенту T_{n-1} есть $\frac{m-n+1}{n}$; въ началѣ оно больше 1, если только m, по крайней мѣрѣ, равно 2; затѣмъ оно уменьшается по мѣрѣ увеличенія n и въ концѣ дѣлается равнымъ $\frac{1}{m}$, когда $n=m$. Пока

оно больше 1, коэффиціенты возрастаютъ; когда это отношеніе превращается въ 1 при нѣкоторомъ значеніи n, оба послѣдовательныхъ коэффиціента—равны; наконецъ, когда оно становится меньше 1, коэффиціенты убываютъ. Это же условіе, т.-е.

$$\frac{m-n+1}{n} \gtreqless 1.$$

равносильно

$$\frac{m+1}{2} \gtreqless n.$$

Слѣдовательно, *пока n меньше половины числа всѣхъ членовъ, равнаго $(m+1)$, т.-е. до середины разложенія, коэффиціенты возрастаютъ*; они убываютъ во второй половинѣ разложенія.

§ 43. Замѣчаніе V. — Такъ какъ относительно знаковъ чиселъ: x и a не было сдѣлано никакого предположенія, то a можно придать отрицательное значеніе $-b$; тогда

$$(x-b)^m = x^m + m(-b)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(-b)^2x^{m-2} + \ldots + (-b)^m.$$

Замѣчая же, что четныя степени $(-b)$ равны такимъ же степенямъ b, а нечетныя степени этихъ количествъ также равны, но противоположны по знаку, можемъ написать:

$$(x-b)^m = x^m - mbx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}b^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}b^3x^{m-3} + \ldots \pm b^m; \quad (5)$$

знакъ у послѣдняго члена будетъ $+$ при m четномъ и $-$ при m нечетномъ.

§ 44. Замѣчаніе VI. — Полагая въ формулѣ (2) $x=1$, $a=1$, получаемъ:

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m}{1} + 1.$$

т.-е. что *сумма коэффиціентовъ разложенія равна 2^m*.

§ 45. Замѣчаніе VII.—Полагая въ формулѣ (5) $x=1$, $b=1$, получаемъ:

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots$$

т.-е. что *сумма коэффиціентовъ четнаго порядка равна суммѣ коэффиціентовъ нечетнаго*.

§ 46. Замѣчаніе VIII. — Между коэффиціентами различныхъ степеней бинома существуютъ многочисленныя соотношенія; мы приведемъ наиболѣе простое изъ нихъ, часто встрѣчающееся въ приложеніи. Пусть

$$(x+a)^m = x^m + A_1 a x^{m-1} + A_2 a^2 x^{m-2} + \ldots + A_n a^n x^{m-n} + \ldots + a^m$$

представляетъ разложеніе m-ой степени бинома, гдѣ для сокращенія положено:

$$A_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Умножаемъ обѣ части этого равенства на $(x+a)$; послѣ выполненія умноженія во второй части по обычному правилу получаемъ:

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (A_1+1)ax^m + (A_2+A_1)a^2x^{m-1} + (A_3+A_2)a^3x^{m-2} + \ldots$$
$$+ (A_n + A_{n-1})a^n x^{m-n+1} + \ldots + a^{m+1}.$$

Отсюда видно, что *каждый изъ коэффиціентовъ разложенія* $(x+a)^{m+1}$ *получается отъ сложенія коэффиціента того же порядка съ предыдущимъ въ разложеніи* $(x+a)^m$. Впрочемъ, можно доказать и непосредственно, что

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} =$$
$$= \frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}. \qquad (6)$$

III. Разложеніе $(a+b\sqrt{-1})^m$.

§ 47. Послѣдовательныя степени $\sqrt{-1}$. — Чтобы раскрыть $(a+b\sqrt{-1})^m$, нужно воспользоваться формулою бинома, которая, какъ результатъ умноженія, будетъ справедлива и для мнимыхъ выраженій по принятымъ соглашеніямъ (I, § 241). Сначала необходимо составить различныя степени $\sqrt{-1}$. По нашимъ соглашеніямъ

$$(\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = +1,$$
$$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и, вообще,

$$\left.\begin{aligned}(\sqrt{-1})^{4k+1}=\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^{4k+2}=-1,\\(\sqrt{-1})^{4k+3}=-\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^{4k}=+1.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

§ 48. Разложеніе $(a+b\sqrt{-1})^m$. — На основаніи предыдущаго

$$(a+b\sqrt{-1})^m=a^m+ma^{m-1}b\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2-$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4+\ldots$$

Члены, въ которыхъ показатель надъ b—четный, вещественны; они равны соотвѣтственнымъ членамъ разложенія $(a+b)^m$ съ тѣмъ только различіемъ, что имъ нужно приписывать по-перемѣнно знакъ $+$ и знакъ $-$. Всѣ члены, куда b входитъ съ нечетнымъ показателемъ, имѣютъ множителемъ $\sqrt{-1}$; слѣдовательно, если не считать этого множителя, они будутъ также равны соотвѣтственнымъ членамъ разложенія $(a+b)^m$, которымъ по-перемѣнно приписаны знакъ $+$ и знакъ $-$. Обыкновенно мнимые члены соединяютъ въ одинъ и пишутъ:

$$(a+b\sqrt{-1})^m=$$
$$=a^m-\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4-\ldots$$
$$+\sqrt{-1}\left[ma^{m-1}b-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\ldots\right].\qquad(8)$$

Слѣдовательно, обозначая вещественную часть черезъ P, а коэффиціентъ при $\sqrt{-1}$ черезъ Q, можемъ написать:

$$(a+b\sqrt{-1})^m=P+Q\sqrt{-1}.$$

Итакъ, *степени мнимаго выраженія суть мнимыя выраженія того же вида.*

Не трудно усмотрѣть, что

$$(a-b\sqrt{-1})^m=P-Q\sqrt{-1}.$$

§ 49. Замѣчаніе. — $(a+b\sqrt{-1})^m$ можетъ быть вещественнымъ и тогда, когда b не нуль. Для этого достаточно, чтобы мнимые члены взаимно уничтожались. Напр.,

$$(1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1})^3=-8.$$

IV. Степень многочлена.

§ 50. Разложеніе m-ой степени трехчлена. — Трехчленъ $(a+b+c)$ можетъ быть разсматриваемъ, какъ биномъ, если первыхъ два члена $(a+b)$ принять за одинъ. Тогда

$$[(a+b)+c]^m=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}c+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}c^2+\dots$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}(a+b)^{m-p}c^p+\dots+c^m. \qquad (9)$$

Если раскрыть различныя степени $(a+b)$, входящія во вторую часть, то получится сумма членовъ вида $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, при чемъ сумма показатетей: α, β, γ постоянно равна m. Дѣйствительно, члены, происшедшіе изъ члена:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}(a+b)^{m-p}c^p,$$

будутъ содержать произведеніе c^p на степени a и b, сумма показателей которыхъ равна $(m-p)$; слѣдовательно, всѣ три показателя дадутъ въ суммѣ m.

Обратно, если α, β, γ суть три цѣлыхъ какихъ-угодно числа, сумма которыхъ равна m, то въ разложеніи будетъ членъ, содержащій $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Дѣйствительно, въ формулѣ (9) найдется членъ

$$\frac{m(m-1)\dots(m-\gamma+1)}{1.2\dots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}\,c^\gamma;$$

въ разложеніе же $(a+b)^{m-\gamma}$ войдетъ членъ, въ которомъ a будетъ съ показателемъ α, а слѣдовательно, b—съ показателемъ β, равномъ $(m-\gamma-\alpha)$.

§ 51. Общій членъ разложенія. — Ищемъ коэффиціентъ члена, содержащаго $a^\alpha b^\beta c^\gamma$; онъ происходитъ, какъ мы сказали, изъ

$$\frac{m(m-1)\dots(m-\gamma+1)}{1.2\dots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}\,c^\gamma,$$

что можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ (§ 34):

$$\frac{1.2\dots m}{1.2\dots\gamma.1.2\dots(m-\gamma)}(a+b)^{m-\gamma}\,c^\gamma.$$

А такъ какъ въ разложеніи $(a+b)^{m-\gamma}$ коэффиціентъ при $a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}$ равенъ

$$\frac{1.2\ldots(m-\gamma)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots(m-\gamma-\alpha)},$$

то искомый членъ будетъ:

$$\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots(m-\gamma)}{1.2\ldots\gamma.1.2\ldots(m-\gamma).1.2\ldots\alpha.1.2\ldots(m-\gamma-\alpha)}\, a^\alpha\, b^{m-\gamma-\alpha}\, c^\gamma,$$

или, по сокращеніи на общаго множителя $1.2\ldots(m-\gamma)$ и замѣнѣ $(m-\gamma-\alpha)$ на β,

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma}\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma; \tag{10}$$

само же разложеніе будетъ состоять изъ всѣхъ членовъ, подобныхъ только-что написанному и соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніямъ α, β, γ, дающимъ въ суммѣ m.

§ 52. Замѣчаніе. — Не трудно вывести, посредствомъ точно такого же пріема, что общій членъ разложенія $(a+b+c+d)^m$ будетъ

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma.1.2\ldots\delta}\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, d^\delta; \tag{11}$$

само же разложеніе будетъ состоять изъ всѣхъ членовъ, подобныхъ только-что написанному и соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніямъ α, β, γ, δ, дающимъ въ суммѣ m.

Слѣдуетъ замѣтить, что если составлять по этому общему члену всѣ члены разложенія, безъ исключенія, то нужно согласиться при $\alpha=0$ принимать произведеніе $1.2.3\ldots\alpha=1$. То же замѣчаніе относится и къ формулѣ (10).

V. Предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, когда m возрастаетъ безпредѣльно.

§ 53. Теоремы о предѣлахъ. — 1. *Если перемѣнное количество A стремится къ нѣкоторому предѣлу l, то произведеніе pA этого количества на конечное число p стремится къ предѣлу pl.*

Дѣйствительно, чтобы сдѣлать разность $(pA-pl)$ меньше, по абсолютной величинѣ, даннаго количества α, достаточно сдѣлать

разность $(A-l)$ меньше $\frac{\alpha}{p}$, что всегда возможно, такъ какъ $(A-l)$ стремится къ нулю.

2. *Если нѣсколько перемѣнныхъ количествъ: A_1, A_2, ..., A_n, взятыхъ въ конечномъ числѣ n, стремятся одновременно къ предѣламъ: l_1, l_2, ..., l_n, то предѣлъ ихъ суммы равенъ суммѣ ихъ предѣловъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$A_1=l_1+\alpha_1,\ A_2=l_2+\alpha_2, \ldots,\ A_n=l_n+\alpha_n,$$

получимъ:

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=(l_1+l_2+\ldots+l_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Количества: α_1, α_2, ..., α_n, по предположенію, стремятся къ нулю; слѣдовательно, ихъ сумма, будучи всегда меньше, по абсолютной величинѣ, наибольшаго изъ нихъ, повтореннаго n разъ, стремится также къ нулю (§ 53, 1). Поэтому

$$\lim(A_1+A_2+\ldots+A_n)=l_1+l_2+\ldots+l_n.$$

Но если число n перемѣнныхъ количествъ увеличивается безпредѣльно, то доказанная теорема не всегда справедлива. Разсмотримъ, напр., сумму количествъ: $\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n}+\ldots+\frac{\alpha}{n}$. Если n возрастаетъ безпредѣльно, то каждое изъ этихъ количествъ стремится къ нулю; сумма же ихъ вмѣсто того чтобы тоже стремиться къ нулю, очевидно, всегда равна α.

3. *Предѣлъ произведенія n перемѣнныхъ количествъ: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$A_1A_2\ldots A_n=(l_1+\alpha_1)(l_2+\alpha_2)\ldots(l_n+\alpha_n).$$

Это произведеніе n двучленныхъ множителей (I, § 42) содержитъ, во-первыхъ, произведеніе предѣловъ $(l_1l_2\ldots l_n)$, затѣмъ рядъ членовъ, въ каждый изъ которыхъ войдетъ множителемъ, по крайней мѣрѣ, одно изъ количествъ: α_1, α_2, ..., α_n; слѣдовательно, каждый изъ этихъ членовъ, будучи произведеніемъ постояннаго количества на количество, стремящееся къ нулю, будетъ также стремиться къ нулю (§ 53, 1). А такъ какъ число ихъ конечно, то и сумма ихъ въ предѣлѣ будетъ равна нулю (§ 53, 2). Итакъ,

$$\lim A_1A_2\ldots A_n=l_1l_2\ldots l_n.$$

И въ этомъ случаѣ изъ самаго хода разсужденій видно, что число перемѣнныхъ количествъ непремѣнно предполагается конечнымъ.

§ 54. Выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ стремится къ нѣкоторому предѣлу, когда m возрастаетъ безпредѣльно. — Выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ при m цѣломъ есть произведеніе m множителей, равныхъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)$; и когда m возрастаетъ безпредѣльно, каждый изъ этихъ множителей стремится къ предѣлу, равному единицѣ, но отсюда нельзя заключать, что предѣломъ произведенія будетъ единица, такъ какъ число множителей возрастаетъ тоже безпредѣльно. Чтобы доказать существованіе этого предѣла, развернемъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ по формулѣ бинома; получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{1}{m^3}+\dots$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\dots n}\,\frac{1}{m^n}+\dots$$

Такъ какъ въ каждомъ членѣ число множителей числителя равно числу множителей, изъ которыхъ каждый равенъ m и которые входятъ въ качествѣ дѣлителей, то мы можемъ написать:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}}{1\cdot 2}+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$
$$+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-n+1}{m}}{1\cdot 2\cdots n}+\dots$$

А такъ какъ очевидно, что

$$\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\dots\frac{m-n+1}{m}=1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}+\dots$$

Сравнимъ теперь это разложеніе съ сходящимся рядомъ, предѣлъ котораго есть e, т.-е. съ

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

Каждый членъ предыдущаго разложенія, начиная съ третьяго, меньше соотвѣтственнаго члена написаннаго ряда, такъ какъ каждый его числитель меньше единицы, а знаменатели соотвѣтственно такіе же, какъ и у членовъ ряда. При этомъ члены разложенія взяты въ конечномъ числѣ $(m+1)$, тогда какъ члены ряда— въ безконечномъ. Отсюда вытекаетъ, что выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, какъ бы велико m ни было, меньше e; слѣдовательно, это выраженіе, увеличиваясь вмѣстѣ съ m, стремится, когда m возрастаетъ безпредѣльно, къ такому предѣлу, который можетъ быть только меньше или равенъ e. Мы сейчасъ докажемъ, что этотъ предѣлъ равенъ e.

§ 55. Предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, когда m возрастаетъ безпредѣльно, оставаясь цѣлымъ числомъ. — Такъ какъ рядъ e —сходящійся (**§ 11**), то для n можно подобрать достаточно большое значеніе, чтобы ошибка при отбрасываніи всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за $(n+1)$-ымъ, была меньше даннаго количества α, какъ бы мало оно ни было; иначе говоря,

$$e - e_n < \alpha,$$

если черезъ e_n обозначить сумму $(n+1)$ первыхъ членовъ.

Съ другой стороны, разсматривая $(n+1)$ первыхъ членовъ нашего разложенія, замѣчаемъ, что по мѣрѣ того какъ m возрастаетъ безпредѣльно, а n остается постояннымъ, числители, каждый отдѣльно, стремятся къ предѣлу, равному единицѣ (**§ 53**, 3). Слѣдовательно, каждый членъ разложенія имѣетъ предѣломъ соотвѣтственный членъ e_n; сумма же ихъ, состоящая изъ конечнаго числа членовъ, имѣетъ предѣломъ (**§ 53**, 2) e_n. Поэтому, можно подобрать для m достаточно большое значеніе, чтобы

$$e_n - A_n < \alpha,$$

гдѣ A_n обозначаетъ сумму $(n+1)$ первыхъ членовъ разложенія. Изъ этихъ двухъ неравенствъ выводимъ:

$$e - A_n < 2\alpha.$$

Такимъ образомъ, если для n подобрано нѣкоторое постоянное достаточно большое число, можно всегда, заставляя m расти безпредѣльно, удовлетворить послѣднему неравенству. Если, далѣе, придавать n значенія, безпредѣльно возрастающія, то разложеніе A_n увеличивается и стремится къ своему предѣлу, равному $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$; при этомъ 2α стремится къ нулю. Слѣдовательно,

$$e-\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=0, \text{ или } \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)=e \qquad (12)$$

§ 56. Случай, когда m принимаетъ дробныя значенія.—Если въ выраженіи $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ приписывать m все бóльшія и бóльшія дробныя значенія, то предѣлъ будетъ тотъ же, т.-е. будетъ равенъ e. Чтобы доказать это, предположимъ, что

$$m=n+\alpha,$$

гдѣ n обозначаетъ весьма большое цѣлое число, а α—меньше единицы; выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, очевидно, будетъ заключаться между выраженіями:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ и } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Дѣйствительно, чтобы получить первое изъ этихъ выраженій, нужно въ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ замѣнить членъ $\frac{1}{m}$ и показатель m соотвѣтственно бóльшими числами: $\frac{1}{n}$ и $n+1$; а чтобы получить второе, нужно замѣнить тѣ же количества меньшими числами: $\frac{1}{n+1}$ и n. Далѣе пишемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Такъ какъ n—цѣлое и весьма большое, то $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ весьма мало отличаются отъ e, $1+\frac{1}{n}$ и $1+\frac{1}{n+1}$ весьма мало отличаются отъ единицы, и оба предыдущихъ выраженія имѣютъ

предѣломъ e. Слѣдовательно, къ тому же предѣлу стремится и $\left(1+\frac{1}{m}\right)$, заключающееся между ними.

§ 57. Предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, когда m—отрицательно и возрастаетъ по абсолютной величинѣ. — Предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ останется тѣмъ же и тогда, когда будемъ приписывать m возрастающія отрицательныя значенія. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $m=-\mu$, при чемъ μ — отрицательно, мы можемъ написать:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right).$$

Когда же μ станетъ расти безпредѣльно, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ будетъ стремиться къ e (§ 56), а $\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$ — къ единицѣ; отсюда заключаемъ, что $\lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}$, а слѣдовательно, и $\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ будетъ равенъ e. Иначе говоря,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

и при m отрицательномъ.

§ 58. Предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}$ или $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$, когда m возрастаетъ безпредѣльно. — Такъ какъ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m},$$

то

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}=\frac{1}{e}. \tag{13}$$

Далѣе, такъ какъ

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m},$$

то

$$\lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{e}. \tag{14}$$

VI. Числа ядеръ, сложенныхъ въ пирамиды.

§ 59. Задача.—Наиболѣе простое рѣшеніе даннаго вопроса основано на рѣшеніи слѣдующей задачи: *найти сумму m-ыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи.*

Пусть будетъ дана прогрессія:

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\,.\,.\, k,$$

разность которой есть r и число членовъ p. Нужно найти

$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots + k^m.$$

Мы можемъ написать:

$$b = a + r,\ c = b + r,\ d = c + r, \ldots,\ l = k + r,$$

при чемъ l обозначаетъ членъ, слѣдующій за k, если продолжить прогрессію. Возвышая эти равенства въ $(m+1)$-ую степень, получаемъ:

$$b^{m+1} = (a+r)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m r + \frac{(m+1)m}{2} a^{m-1} r^2 + \ldots + r^{m+1},$$
$$c^{m+1} = (b+r)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m r + \frac{(m+1)m}{2} b^{m-1} r^2 + \ldots + r^{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$l^{m+1} = (k+r)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m r + \frac{(m+1)m}{2} k^{m-1} r^2 + \ldots + r^{m+1}.$$

Складывая всѣ эти равенства и обозначая въ общемъ видѣ черезъ S_μ сумму: $a^\mu + b^\mu + \ldots + k^\mu$, напишемъ:

$$l^{m+1} - a^{m+1} = (m+1) r S_m + \frac{(m+1)m}{1.2} r^2 S_{m-1} +$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} r^3 S_{m-2} + \ldots + p r^{m+1}. \qquad (15)$$

Изъ этого уравненія опредѣляется S_m, когда извѣстны S_{m-1}, $S_{m-2}, \ldots, S_2, S_1$. Поэтому, полагая послѣдовательно $m = 1, = 2, = 3$, и т. д., будемъ получать послѣдовательно S_1, S_2, S_3, и т. д.

§ 60. Приложеніе.—Предположимъ, напр., что данная прогрессія представляетъ рядъ n первыхъ цѣлыхъ чиселъ:

$$\div 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n.$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_\mu = 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots + n^\mu;\; a = 1,\; l = n + 1,\; r = 1,\; p = n;$$

и наша общая формула превратится въ слѣдующую:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1.2} S_{m-1} +$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} S_{m-2} + \ldots + \frac{(m+1)m \ldots 3.2}{1.2 \ldots m} S_1 + n. \qquad (16)$$

Полагая сначала $m = 1$, получимъ:

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n, \text{ откуда } S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

формула уже извѣстная.

Полагая $m = 2$, получимъ:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

откуда

$$S_2 = \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{6}.$$

или

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (17)$$

Это—та формула, которая послужитъ намъ для нахожденія чиселъ ядеръ, сложенныхъ въ пирамиды.

Какъ мы видѣли, она выводится изъ такой общей формулы, которая точно такъ же можетъ дать сумму кубовъ, сумму четвертыхъ степеней, и т. д., натуральныхъ чиселъ. Если же мы пожелаемъ непосредственно и притомъ наиболѣе простымъ путемъ придти къ этой формулѣ, которая только одна и понадобится намъ въ дальнѣйшемъ изложеніи, то можно поступить слѣдующимъ образомъ.

§ 61. Непосредственное разысканіе суммы квадратовъ n первыхъ цѣлыхъ чиселъ.—Имѣемъ тождества:

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1,$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1,$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1.$$

Складываемъ всѣ эти равенства, при чемъ опускаемъ одинаковые члены въ обѣихъ частяхъ и обозначаемъ черезъ S_2 сумму квадратовъ натуральныхъ чиселъ и черезъ S_1 сумму ихъ первыхъ степеней; получаемъ уравненіе:

$$(n+1)^3=1+3S_2+3S_1+n,$$

тождественное съ выведеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ; слѣдовательно, и значеніе для S_2 будетъ то же самое.

§ 62. Равностороннія треугольныя пирамиды ядеръ. — Основаніе нѣкоторой равносторонней треугольной пирамиды составлено изъ ядеръ, образующихъ равносторонній треугольникъ. Первый рядъ этого треугольника содержитъ 1 ядро, второй—2, третій—3, n-ый—n; все число шаровъ треугольника будетъ:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}.$$

Слой, непосредственно лежащій надъ этимъ, составленъ изъ ядеръ, образующихъ точно также равносторонній треугольникъ, при чемъ сторона его содержитъ однимъ ядромъ меньше стороны нижняго треугольника; слѣдовательно, число ядеръ этого второго слоя получится изъ предыдущей формулы, если замѣнить въ ней n на $(n-1)$; такимъ образомъ это число равно $\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$. Въ третьемъ слоѣ ядеръ будетъ: $\frac{(n-2)^2+(n-2)}{2}$; и такъ далѣе, до перваго, который содержитъ: $\frac{1^2+1}{2}$.

Поэтому, все число шаровъ:

$$T=\frac{n^2+n}{2}+\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}+\frac{(n-2)^2+(n-2)}{2}+\ldots+\frac{1^2+1}{2},$$

а это можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$T=\frac{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2}{2}+\frac{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1}{2},$$

что по формуламъ § 60-го дастъ:

$$T=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)(2n+4)}{12},$$

или

$$T=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{18}$$

Это и есть та формула, которая даетъ число ядеръ, сложенныхъ въ равностороннюю треугольную пирамиду.

§ 63. Пирамида ядеръ съ квадратнымъ основаніемъ. — Основаніе такой пирамиды составлено изъ ядеръ, образующихъ квадратъ; если обозначить черезъ n число ядеръ, содержащихся въ каждой сторонѣ этого квадрата, то во всемъ квадратѣ ихъ будетъ n^2. Второй слой, очевидно, содержитъ $(n-1)^2$ ядеръ, третій — $(n-2)^2$, и т. д.; наконецъ, послѣдній содержитъ только одно ядро. Слѣдовательно, все число

$$Q=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{19}$$

§ 64. Пирамида ядеръ съ прямоугольнымъ основаніемъ.—Основаніе такой пирамиды составлено изъ ядеръ, образующихъ прямоугольникъ. Если одна изъ сторонъ основанія содержитъ m ядеръ, а другая n, то число ядеръ во всемъ прямоугольникѣ будетъ mn. Слѣдующій слой также прямоугольникъ, стороны котораго содержатъ соотвѣтственно $(m-1)$ и $(n-1)$ ядеръ; слѣдовательно, число ядеръ въ этомъ прямоугольникѣ равно $(m-1)(n-1)$. Третій слой содержитъ ядеръ $(m-2)(n-2)$, и такъ далѣе, до послѣдняго, въ которомъ будетъ $(m-n+1)$ ядеръ, расположенныхъ въ одну линію (при чемъ предполагается, что $m>n$). Отсюда вытекаетъ, что все искомое число

$$R=mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+\ldots+(m-n+1)1.$$

Полагаемъ $m-n=p$; тогда $m=n+p$ и предыдущая формула превратится въ слѣдующую:

$$R=n(n+p)+(n-1)(n-1+p)+(n-2)(n-2+p)+\ldots+1(1+p),$$

т.-е.

$$R=[n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2]+p[n+(n-1)+\ldots+1],$$

или, по извѣстнымъ формуламъ (§ 60),

$$R=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+p\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

или, наконецъ,

$$R=\frac{n(n+1)(2n+3p+1)}{6}. \qquad (20)$$

§ 65. Способъ повѣрять формулы.—Мы покажемъ, въ примѣненіи къ предыдущимъ формуламъ, одинъ пріемъ разсужденія, употребляющійся весьма часто; достаточно будетъ развить его на одномъ только примѣрѣ.

Предположимъ, что дана безъ доказательства формула:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Чтобы ее провѣрить, начинаютъ съ простѣйшихъ случаевъ:

при $n=1$ будетъ: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}=\frac{1.2.3}{6}=1^2$;

» $n=2$ » $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}=\frac{2.3.5}{6}=5=1^2+2^2$;

» $n=3$ » $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}=\frac{3.4.7}{6}=14=1^2+2^2+3^2$.

Такимъ образомъ, формула оказывается справедливою для значеній: 1, 2, 3 числа n. Чтобы доказать ея справедливость въ общемъ случаѣ, достаточно показать, что если она — справедлива для нѣкотораго значенія n, то она будетъ справедлива и для значенія $(n+1)$. Итакъ, пусть будетъ дано:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad (a)$$

требуется доказать, что

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \qquad (b)$$

Первыя части уравненій: (a) и (b) разнятся на $(n+1)^2$. Поэтому, если и вторыя части отличаются на ту же величину, то изъ пер-

ваго равенства необходимо вытекаетъ второе. Составляемъ эту разность:

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(6n+6)}{6}=(n+1)^2.$$

Теорема доказана.

Подобный ходъ разсужденій приложимъ и къ другимъ формуламъ, выражающимъ число ядеръ въ различныхъ случаяхъ.

КОНСПЕКТЪ.

§ 30. Опредѣленіе соединеній; что называется размѣщеніями и что—сочетаніями. — § 31. Число размѣщеній изъ m предметовъ по n. — § 32. Число перестановокъ изъ m предметовъ. — § 33. Число сочетаній изъ m предметовъ по n.—§ 34. Болѣе простой видъ для числа сочетаній. Число сочетаній изъ m буквъ по n равно числу сочетаній изъ m буквъ по $(m-n)$. -§ 35. Число сочетаній изъ m предметовъ по n равно суммѣ чиселъ сочетаній изъ $(m-1)$ предметовъ по n и изъ $(m-1)$ предметовъ по $(n-1)$.—§ 36. Произведеніе n цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе n первыхъ цѣлыхъ чиселъ. — § 37. Составленіе произведенія m биномовъ съ однимъ и тѣмъ же первымъ членомъ. — § 38. Степень бинома. — § 39. Общій членъ бинома. — § 40. Способъ составлять какой-угодно членъ по предыдущему. — § 41. Коэффиціенты членовъ, равно удаленныхъ отъ концовъ, равны. -§ 42. Коэффиціенты возрастаютъ до середины разложенія. — § 43. Степень бинома, въ которомъ второй членъ—отрицателенъ. -§ 44. Сумма коэффиціентовъ бинома. § 45. Сумма коэффиціентовъ четнаго порядка равна суммѣ коэффиціентовъ нечетнаго.—§ 46. Соотношенія между коэффиціентами двухъ послѣдовательныхъ степеней $(x+a)$. — § 47. Послѣдовательныя степени $\sqrt{-1}$.—§ 48. Разложеніе $(a+b\sqrt{-1})^m$.—§ 49. Условія, при которыхъ результатъ — вещественный.—§ 50 Степень трехчлена.—§ 51. Общій членъ предыдущаго разложенія. — § 52. Общій членъ разложенія $(a+b+c+d)^m$. — § 53. Теоремы о предѣлахъ.—§ 54. Выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ стремится къ нѣкоторому предѣлу, когда m возрастаетъ безпредѣльно.—§ 55. Этотъ предѣлъ есть e при m цѣломъ.— § 56. Разсматриваемое выраженіе будетъ также имѣть предѣломъ e и при m дробномъ.—§ 57. Оно будетъ также имѣть предѣломъ e и при m отрицательномъ. — § 58. Предѣлъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m}$ или $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$ равенъ $\frac{1}{e}$.—§ 59. Сумма одинаковыхъ степеней членовъ прогрессіи.—§ 60. Приложеніе. — § 61. Сумма квадратовъ натуральныхъ чиселъ. — § 62. Равностороннія треугольныя пирамиды ядеръ.—§ 63. Пирамиды ядеръ съ квадратнымъ основаніемъ.—§ 64. Пи-

рамиды ядеръ съ прямоугольнымъ основаніемъ. — § 65. Способъ провѣрить формулу, выражающую сумму квадратовъ натуральныхъ чиселъ.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Доказать справедливость формулъ:

$$1)\ \overset{m}{[(a+b)]} = \overset{m}{[a]} + m\overset{m-1}{[a]}\,b + \frac{m(m-1)}{1.2}\overset{m-2}{[a]}\overset{2}{[b]} + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}\overset{m-n}{[a]}\overset{n}{[b]} + \dots + \overset{m}{[b]},$$

$$2)\ \overset{m}{[(a+b+c)]} = \overset{m}{[a]} + \dots + \frac{1.2\dots m}{1.2\dots\alpha.1.2\dots\beta.1.2\dots\gamma}\overset{\alpha}{[a]}\overset{\beta}{[b]}\overset{\gamma}{[c]} + \dots,$$

при чемъ $\overset{n}{[m]}$ обозначаетъ произведеніе $m(m-1)\dots(m-n+1)$. Во второй части второй формулы члены — аналогичны членамъ 2-ой части первой формулы и соотвѣтствуютъ всѣмъ значеніямъ α, β, γ, для которыхъ $\alpha+\beta+\gamma=m$. Символъ $\overset{0}{[a]}$ принимается равнымъ 1.

Каждый изъ членовъ разсматривается, какъ число размѣщеній.

II. Найти число x членовъ разложенія $(a+b+c)^m$ и число y членовъ разложенія $(a+b+c+d)^m$.

Отв.:

$$x = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2},\ y = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}.$$

III. Доказать справедливость формулы.

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2} +$$

$$+ \frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6} + \dots$$

$$+ (-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-2p+1)}{1.2.3\dots p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p} + \dots$$

Доказываютъ, что если эта формула — справедлива для двухъ послѣдовательныхъ значеній n, то она справедлива и для значенія, непосредственно высшаго.

IV. Доказать справедливость формулы:

$$1.2\dots m = (m+1)^m - m.m^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m + \dots$$

Методъ, аналогичный предыдущему; или же выражаютъ двумя способами m-ую *разность* отъ x^m (см. Кн. IV)

V. Найти наибольшій членъ разложенія $(x+a)^m$.

Этотъ членъ будетъ:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,a^p x^{m-p},$$

гдѣ p — наибольшее цѣлое число, содержащееся въ дроби $\frac{(m+1)a}{x+a}$.

VI. Даны x и a и дано, что m увеличивается безпредѣльно; найти предѣлъ отношенія ихъ показателей въ наибольшемъ членѣ разложенія $(x+a)^m$.

Этотъ предѣлъ равенъ $\frac{x}{a}$.

VII. Найти наибольшій членъ разложенія $(a+b+c)^m$ и предѣлы отношеній показателей a, b и c въ этомъ наибольшемъ членѣ, когда m безпредѣльно увеличивается.

Этотъ наибольшій членъ выводится изъ упражненія VI; показатели же въ этомъ членѣ стремятся стать пропорціональными a, b и c.

VIII. Показать, что $(x+a)^m-(x-a)^m$, по абсолютной величинѣ, больше $2x^m$. Отсюда вывести maximum $(x+y)$, если x^m+y^m дано.

IX. Доказать справедливость формулы:

$$(x+\alpha)^m = x^m + m\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-1}+\ldots$$
$$+m\alpha[\alpha-(m-1)\beta]^{m-2}[x+(m-1)\beta]+\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

Эта формула въ томъ случаѣ, когда $\beta=0$, не отличается отъ формулы бинома; она—справедлива, каково бы ни было β.

Приложеніе способа § 65-го; или же непосредственная повѣрка.

X. Число способовъ разбить многоугольникъ діагоналями на треугольники; доказать формулы:

$$P_{n+1}=P_n+P_{n-1}P_3+P_{n-2}P_4+\ldots+P_3P_{n-1}+P_n;$$
$$P_{n+1}=\frac{4n-6}{n}P_n.$$

Здѣсь P_n обозначаетъ число способовъ, какими можно разбить многоугольникъ, содержащій n сторонъ, на треугольники посредствомъ діагоналей.

Во-первыхъ, отыскиваютъ, сколькимъ способамъ принадлежитъ каждый изъ треугольниковъ, имѣющихъ въ основаніи одну и ту же сторону многоугольника; во-вторыхъ, сколькимъ способамъ принадлежитъ одна и та же діагональ.

XI. Во всякой перестановкѣ изъ n чиселъ 1, 2, 3,..., n считается *безпорядкомъ* (*dérangement*), если послѣ какого-нибудь изъ чиселъ стоитъ, непосредственно или нѣтъ, меньшее число. Такъ, напр., въ перестановкѣ: 1, 4, 3, 2, 5 изъ пяти чиселъ число 4 даетъ *два* безпорядка: (4, 3) и (4, 2); а число 3

даетъ *одинъ* безпорядокъ: (3, 2). Доказать, что число всѣхъ безпорядковъ, содержащихся въ перестановкахъ изъ этихъ n чиселъ, равно $(1.2\ldots n).\frac{n(n-1)}{4}$.

Сначала доказывается, что $D_{n+1} = (n+1)D_n + \frac{n}{2}P_n$, гдѣ черезъ D_n обозначено число безпорядковъ въ перестановкахъ изъ n чиселъ, а черезъ P_n — число перестановокъ. Отсюда выводится:

$$D_{n+p} = (n+1)(n+2)\ldots(n+p)D_n + \frac{1}{2}\left[pn + \frac{p(p-1)}{2}\right]P_{n+p};$$

это же равенство, если положить въ немъ $n=1$, а затѣмъ замѣнить $p+1$ на n, дастъ искомую формулу.

XII. Найти сумму квадратовъ коэффиціентовъ бинома Ньютона.

Эта сумма есть коэффиціентъ при $a^m x^m$ въ разложеніи $(x+a)^{2m}$.

XIII. Предыдущая сумма можетъ быть выражена одною изъ слѣдующихъ двухъ формулъ:

$$\frac{2n.(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{2.6.10.14\ldots(4n-2)}{1.2\ldots n}.$$

Показать, что эти формулы равносильны.

Прилагается методъ § 65-го, или непосредственная повѣрка.

XIV. Доказать, что если въ суммѣ n дробей:

$$S=\frac{1-x}{1-a}+\frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3}+\ldots+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)\ldots(a^{n-1}-x)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}-a^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

положить $x=a^n$, то эта сумма будетъ равна n.

Прилагается методъ § 65-го.

XV. Найти предѣлъ $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, когда m возрастаетъ безпредѣльно. Этотъ предѣлъ есть e^x. Развернуть его въ рядъ.

XVI. Доказать, что рядъ:

$$\frac{1}{z^{\alpha_1}}+\frac{1}{z^{\alpha_2}}+\frac{1}{z^{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{z^{\alpha_m}}+\ldots,$$

въ которомъ какъ z, такъ и показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ суть цѣлыя числа, имѣетъ несоизмѣримый предѣлъ, когда разности $\alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-\alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}-\alpha_m$ идутъ въ постоянно возрастающемъ порядкѣ.

Ходъ разсужденія аналогиченъ тому, какимъ пользовались при доказательствѣ несоизмѣримости e.

XVII. Найти сумму кубовъ n первыхъ цѣлыхъ чиселъ.

По § 60-му находимъ: $S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, или $S_3=S_1^2$.

XVIII. Пусть S_m обозначаетъ сумму m-ыхъ степеней n первыхъ натуральныхъ чиселъ; доказать, что S_m содержится между $\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1}$ и $\frac{n^{m+1}}{m+1}$; m—какое угодно цѣлое число.

Прилагается формула (6) § 60-го.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Дополненіе къ теоріи логариѳмовъ.

I. Несоизмѣримые показатели.

§ 66. Несоизмѣримые показатели—Въ первой части мы показали (**§ 358**), какъ опредѣляется несоизмѣримое число, а именно, указывается, какія соизмѣримыя числа меньше его и какія соизмѣримыя числа больше его. Мы также говорили (**§ 359** и слѣд.), какъ нужно понимать различныя дѣйствія надъ этого рода числами.

Выраженіе a^x при соизмѣримомъ показателѣ x было уже опредѣлено (I, **§ 105**) и не представляетъ никакой неясности; дѣйствительно, полагая $x=\frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа, мы можемъ написать:

$$a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Мы будемъ всегда предполагать, что a—положительно и будемъ разсматривать только вещественныя и положительныя значенія радикала; тогда не появится никакого ни затрудненія, ни двусмысленности. Въ случаѣ x отрицательнаго, равнаго $(-m)$, a^x также опредѣлено (I, **§ 89**), посредствомъ уравненія:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

Итакъ, намъ остается опредѣлить a^x, когда x—несоизмѣримое число, положительное или отрицательное. Въ такомъ случаѣ нужно принять слѣдующее опредѣленіе:

a^x есть предѣлъ, къ которому стремятся степени a, по мѣрѣ того какъ соизмѣримые показатели ихъ все болѣе и болѣе стремятся къ x.

Это опредѣленіе хотя и очень просто, но нѣкоторыя дальнѣйшія разъясненія все-таки необходимы. Въ самомъ дѣлѣ, можно было бы спросить, будетъ ли этотъ предѣлъ такимъ образомъ ясно установленъ и будетъ ли предѣлъ степеней a всегда одинъ и тотъ же, каковъ бы ни былъ рядъ соизмѣримыхъ показателей, безконечно приближающихся къ x. Доказательство этого положенія покоится на нѣсколькихъ теоремахъ.

§ 67. Теорема I — *Всѣ соизмѣримыя степени положительнаго числа положительны.* Это вытекаетъ изъ замѣчанія въ предыдущемъ параграфѣ, что мы разсматриваемъ только положительныя значенія радикаловъ.

§ 68. Теорема II.—*Всѣ положительныя степени числа, большаго единицы, суть также больше единицы, а всѣ отрицательныя степени меньше единицы.*

Для степеней числа, меньшаго единицы, справедливо обратное заключеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть нѣкоторое число a больше единицы и пусть $a^{\frac{m}{n}}$—положительная степень a. По опредѣленію

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

но такъ какъ a больше единицы, то, очевидно, цѣлая степень a^m, а слѣдовательно, и $\sqrt[n]{a^m}$ также больше единицы.

Итакъ, положительныя степени a больше единицы; въ такомъ случаѣ изъ равенства:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

видно, что отрицательныя степени, будучи обратными положительнымъ, будутъ меньше единицы.

Наконецъ, придавая a значеніе, меньшее единицы, можно его представить въ видѣ $\frac{1}{a'}$, при чемъ a' больше единицы; тогда

$$a^x = \frac{1}{a'^x},$$

откуда вытекаетъ, что значенія x, при которыхъ a'^x больше единицы, дѣлаютъ a^x меньше единицы, и обратно.

§ 69. Теорема III.—*Если x получаетъ соизмѣримыя значенія возрастающія, то выраженіе a^x всегда измѣняется въ одномъ направленіи: оно увеличивается при a, большемъ единицы, и уменьшается при a, меньшемъ единицы.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ p и q два соизмѣримыхъ значенія, положительныхъ или отрицательныхъ, приписанныхъ x въ послѣдовательномъ порядкѣ; тогда (I, **§ 91**)·

$$\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}.$$

Но $(q-p)$ — положительно, потому что, по предположенію, q больше p; поэтому, если a больше единицы, то и a^{q-p} больше единицы, откуда слѣдуетъ, что $a^q > a^p$. Наоборотъ, если a меньше единицы, то и a^{q-p} меньше единицы, откуда $a^q < a^p$. Итакъ, a^x увеличивается въ первомъ случаѣ, когда x переходитъ отъ значенія p къ значенію q, и уменьшается во второмъ случаѣ.

§ 70. Теорема IV. — *Можно въ выраженіи a^x придать соизмѣримому числу x на столько малое приращеніе, что a^x измѣнится на сколь-угодно малую величину.*

Пусть m будетъ какое-нибудь соизмѣримое значеніе для x; m можно увеличить на количество α, достаточно малое, чтобы разность $(a^{m+\alpha}-a^m)$ была сколь-угодно малою. Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства:

$$a^{m+\alpha}=a^m\times a^\alpha$$

слѣдуетъ, что

$$a^{m+\alpha}-a^m=a^m(a^\alpha-1).$$

А такъ какъ a^m есть число, независящее отъ α, то, поэтому, достаточно доказать, что $(a^\alpha-1)$ можетъ быть сдѣлано сколь-угодно малымъ при достаточно малыхъ значеніяхъ α.

Предположимъ сначала, что a больше единицы. Каково бы ни было положительное значеніе α, a^α всегда будетъ (**§ 68**) больше единицы. Чтобы показать, что оно приближается къ единицѣ какъ-угодно близко, достаточно вывести, что оно можетъ стать меньше какого-нибудь числа $(1+\varepsilon)$, бóльшаго единицы, и что, каково бы ни было ε, можно выбрать α такъ, что будетъ:

$$a^\alpha<1+\varepsilon.$$

Дѣйствительно, полагаемъ $\alpha = \frac{1}{k}$, т.-е. что α проходитъ безконечно убывающія значенія, соотвѣтствующія безконечно возрастающимъ значеніямъ k; тогда предыдущее неравенство перейдетъ въ слѣдующее:

$$a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon,$$

или, что то же самое, въ

$$(1 + \varepsilon)^k > a.$$

А такъ какъ цѣлыя степени $(1 + \varepsilon)$ образуютъ возрастающую геометрическую прогрессію, члены которой могутъ превзойти всякій предѣлъ (I, § 339), то послѣднее неравенство всегда возможно и, слѣдовательно, предложеніе доказано въ случаѣ $a > 1$.

Если a меньше 1, то представляемъ его въ видѣ $\frac{1}{a'}$, гдѣ $a' > 1$; тогда a^α будетъ равно $\frac{1}{a'^\alpha}$; по предыдущему же a'^α можно сдѣлать отличающимся отъ единицы на сколь-угодно малую величину; отсюда очевидно, что то же относится и къ a^α.

§ 71. Строгое опредѣленіе функціи a^x. — Предыдущія теоремы — необходимы, чтобы дать для a^x при x несоизмѣримомъ вполнѣ строгое опредѣленіе и устранить такимъ образомъ всякую неясность относительно этой функціи; но и, помимо этого, каждая изъ нихъ представляетъ весьма важное предложеніе.

Мы говоримъ: *a^x при несоизмѣримомъ значеніи h, придаваемомъ показателю x, представляетъ число, содержащееся между значеніями a^x, соотвѣтствующими соизмѣримымъ показателямъ, меньшимъ, чѣмъ h, и значеніями a^x, соотвѣтствующими соизмѣримымъ показателямъ, большимъ, чѣмъ h.* Это опредѣленіе, аналогичное тому, которое мы дали, въ ариѳметикѣ, для квадратныхъ и кубическихъ корней и, въ элементарной алгебрѣ, для логариѳмовъ, допускаетъ для a^x только одно и притомъ опредѣленное значеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы сдѣлать болѣе яснымъ это опредѣленіе, предположимъ, что значенія a^x представляютъ длины, нанесенныя на нѣкоторой прямой отъ произвольно выбраннаго начала; тогда концы этихъ отрѣзковъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ x, меньшимъ h, заполнятъ нѣкоторую одну часть прямой, а концы отрѣзковъ,

соотвѣтствующихъ значеніямъ x, большимъ h, заполнять другую часть прямой, кромѣ того, *изъ предыдущихъ теоремъ вытекаетъ*, что эти части вполнѣ отдѣлены одна отъ другой (§ 69) и что между ними не можетъ быть никакого конечнаго разстоянія (§ 70), но только одна точка раздѣла (демаркаціонная точка). Разстояніе, на которомъ находится эта точка отъ начала, измѣряется a^x.

II. Выраженіе a^x можетъ принимать всевозможныя положительныя значенія, когда a — положительное число, большее или меньшее единицы.

§ 72. Непрерывность функціи a^x.—Мы только что видѣли (§ 70), что когда a задано, то при достаточно малыхъ приращеніяхъ x выраженіе a^x можетъ измѣняться на сколь-угодно малую величину. Поэтому говорятъ, что a^x есть *непрерывная функція* отъ x; слово *непрерывный* показываетъ, что разсматриваемое выраженіе не можетъ сразу перейти отъ одного значенія къ другому, не проходя промежуточныхъ значеній.

§ 73. Выраженіе a^x можетъ принимать всевозможныя положительныя значенія.—Изъ *непрерывности выраженія* a^x слѣдуетъ, что *когда x, при a положительномъ, измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, само выраженіе можетъ принимать всевозможныя положительныя значенія.* При доказательствѣ этого мы будемъ различать два случая.

1) *a больше единицы.* Цѣлыя и положительныя степени a образуютъ возрастающую прогрессію и, слѣдовательно, всегда найдется (I, § 339) достаточно большой показатель, при которомъ a превзойдетъ всякую заранѣе заданную величину; кромѣ того, при $x=0$, a^x обращается въ единицу. Итакъ, разсматриваемая функція можетъ стать равною единицѣ и сколь-угодно большому числу; слѣдовательно, въ силу непрерывности она можетъ принимать всевозможныя промежуточныя значенія. Отсюда видно, что при измѣненіи x отъ 0 до $+\infty$ функція a^x измѣняется отъ 1 до $+\infty$ и проходитъ всевозможныя значенія, большія единицы.

Если будемъ придавать x отрицательныя значенія, полагая, напр., $x=-m$, то получимъ равенство:

$$a^x = \frac{1}{a^m},$$

во второй части котораго, при измѣненіи m отъ 0 до $+\infty$, знаменатель будетъ проходить всевозможныя значенія, бо́льшія единицы, а слѣдовательно, дробь будетъ принимать всѣ значенія, меньшія единицы. Отсюда видно, что при измѣненіи x отъ $-\infty$ до 0 функція a^x измѣняется отъ 0 до 1.

Кромѣ того ясно, что a^x не можетъ принять два раза одно и то же значеніе. Дѣйствительно, если бы, напр.,

$$a^x = a^{x'},$$

то

$$1 = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x};$$

а такъ какъ очевидно, что только нулевая степень числа, большаго 1, равняется единицѣ, то необходимо

$$x' = x.$$

2) *а меньше единицы.* Полагаемъ $a = \frac{1}{a'}$, гдѣ a' будетъ бо́льше единицы. Тогда

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

По предыдущему же при измѣненіи x отъ 0 до $+\infty$ функція a'^x будетъ проходить всевозможныя значенія, бо́льшія единицы и, слѣдовательно, a^x будетъ принимать всѣ значенія, меньшія единицы. Далѣе, при измѣненіи x отъ 0 до $-\infty$ функція a'^x пройдетъ всѣ значенія, меньшія единицы и, слѣдовательно, a^x пройдетъ всѣ значенія, бо́льшія единицы.

Итакъ, въ этомъ второмъ случаѣ a^x можетъ также принимать всевозможныя положительныя значенія.

III. Общія свойства логариѳмовъ.

§ 74. Опредѣленіе, данное нами въ первой части (**§ 350**), даетъ возможность вывести главныя свойства логариѳмовъ; но чтобы изученіе ихъ сдѣлать болѣе научнымъ, нужно принять новое опредѣленіе.

§ 75. Опредѣленіе логариѳмовъ. Когда дано соотношеніе:

$$a^x = b,$$

то говорятъ, что x есть *логариѳмъ* числа b въ системѣ съ основаніемъ a, и пишутъ:

$$x = \log b$$

Всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ въ системѣ съ основаніемъ a и, притомъ, только одинъ; дѣйствительно, мы видѣли (§ 73), что, когда x непрерывно возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, a^x проходитъ всѣ положительныя значенія и, притомъ, каждое изъ нихъ только одинъ разъ. Отрицательныя числа не имѣютъ вещественныхъ логариѳмовъ.

Совокупность логариѳмовъ различныхъ чиселъ при одномъ и томъ же основаніи a образуетъ такъ называемую *систему логариѳмовъ.* Логариѳмы одной и той же системы владѣютъ весьма важными свойствами, которыя мы прежде всего и докажемъ. Мы предполагаемъ, что основаніе всегда положительно.

§ 76. Теорема I.—*Логариѳмъ произведенія двухъ чиселъ равенъ суммѣ ихъ логариѳмовъ*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x и y обозначаютъ логариѳмы чиселъ: b и c; въ такомъ случаѣ (§ 75)

$$a^x = b,\ a^y = c.$$

Перемножая эти два уравненія по-членно, получаемъ:

$$a^{x+y} = bc.$$

откуда видно, что $(x+y)$ есть логариѳмъ bc, т.-е. что

$$\log bc = \log b + \log c.$$

§ 77. Теорема II.—*Логариѳмъ частнаго двухъ чиселъ равенъ разности ихъ логариѳмовъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x и y обозначаютъ логариѳмы двухъ чиселъ: b и c; въ такомъ случаѣ (§ 75)

$$a^x = b,\ a^y = c.$$

Дѣля эти два уравненія по-членно, получаемъ:

$$a^{x-y} = \frac{b}{c},$$

откуда видно, что $(x - y)$ есть логариѳмъ $\frac{b}{c}$, т.-е. что

$$\log\frac{b}{c} = \log b - \log c.$$

§ 78. Теорема III.—*Логариѳмъ n-ой степени нѣкотораго числа равенъ произведенію n на логариѳмъ этого числа, каково бы ни было n (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное).*

Пусть x есть логариѳмъ b, тогда

$$a^x = b,$$

откуда, возвысивъ обѣ части въ степень n, получимъ:

$$a^{nx} = b^n;$$

слѣдовательно, nx есть логариѳмъ b^n, и мы можемъ написать:

$$\log b^n = n\log b.$$

Эта теорема, очевидно, заключаетъ въ себѣ и теорему IV (I, **§ 370**) относительно логариѳма корня.

§ 79. Теорема IV.—*Во всякой системѣ логариѳмовъ логариѳмъ единицы есть нуль, а логариѳмъ основанія системы есть единица.*

Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было a,

$$a^0 = 1,$$
$$a^1 = a.$$

§ 80. Теорема V.—*Если основаніе системы больше единицы, то логариѳмы чиселъ, бо́льшихъ единицы,—положительны, а логариѳмы чиселъ меньшихъ единицы,—отрицательны. При основаніи меньшемъ единицы,—наоборотъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли (**§ 68**), что положительныя степени числа, бо́льшаго единицы, больше единицы, а отрицательныя его степени меньше единицы. Обратное заключеніе — справедливо для степеней чиселъ, меньшихъ единицы. А въ такомъ случаѣ, при a, большемъ единицы, изъ уравненія:

$$a^x = b$$

вытекаетъ, что x, т.-е. $\log b$, — положителенъ, если b больше единицы, и отрицателенъ, если b меньше единицы.

Наоборотъ, при a, меньшемъ единицы, изъ уравненія

$$a^x = b$$

вытекаетъ, что x, т.-е. $\log b$, отрицателенъ, если b больше единицы, и положителенъ въ противномъ случаѣ.

§ 81. Замѣчаніе.—Отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, потому что положительное основаніе, возвышенное въ какую бы то ни было степень, положительную или отрицательную, даетъ положительное число.

IV. Тождественность алгебраическихъ и ариѳметическихъ логариѳмовъ.

§ 82 Замѣчаніе.—Необходимо доказать, что логариѳмы по принятому нами опредѣленію не отличаются отъ логариѳмовъ, разсматриваемыхъ въ ариѳметикѣ при помощи двухъ прогрессій.

§ 83. Алгебраическіе логариѳмы входятъ въ системы, разсмотрѣнныя въ ариѳметикѣ.—Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ числа, расположенныя въ геометрической прогрессіи, начинающейся съ единицы:

$$\because 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 \cdot \ldots : q^n : q^{n+1},$$

и назовемъ черезъ x логариѳмъ q; тогда логариѳмы различныхъ членовъ этой прогрессіи будутъ (§ 78):

$$0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ \ldots,\ nx,\ (n+1)x.$$

Такимъ образомъ, *если числа расположены въ геометрической прогрессіи, начинающейся съ единицы, ихъ логариѳмы* (§ 75) *образуютъ ариѳметическую прогрессію, начинающуюся съ* 0.

Если теперь вставить нѣкоторое число k среднихъ (геометрическихъ и ариѳметическихъ) между послѣдовательными членами обѣихъ прогрессій, то въ ариѳметикѣ *члены, введенные въ ариѳметическую прогрессію, называются логариѳмами соотвѣтственныхъ членовъ, введенныхъ въ геометрическую прогрессію.* Мы сейчасъ покажемъ, что слѣдствія изъ этого опредѣленія согласуются съ опредѣленіемъ, которое мы даемъ въ алгебрѣ (§ 75).

Въ самомъ дѣлѣ, вставляемъ k среднихъ геометрическихъ между членами: q^n, q^{n+1} геометрической прогрессіи и k среднихъ ариѳме-

тическихъ между членами: nx, $(n+1)x$ ариѳметической прогрессіи; для прогрессій, образованныхъ этими средними членами, знаменатель и разность соотвѣтственно будутъ:

$$\sqrt[k+1]{q}, \quad \frac{x}{k+1};$$

p-ый средній въ геометрической прогрессіи будетъ

$$q^n \times \left(\sqrt[k+1]{q}\right)^p,$$

а въ ариѳметической прогрессіи

$$nx + p\left(\frac{x}{k+1}\right).$$

А такъ какъ

$$q^n \times \left(\sqrt[k+1]{q}\right)^p = q^{n+\frac{p}{k+1}}, \quad nx + p\left(\frac{x}{k+1}\right) = x\left(n+\frac{p}{k+1}\right)$$

и такъ какъ x, по предположенію, есть логариѳмъ q, то второе изъ этихъ выраженій является (§ 78) логариѳмомъ перваго.

Такимъ образомъ, *при вставленіи одного и того же числа среднихъ въ обѣ прогрессіи, члены, введенные въ ариѳметическую прогрессію, являются логариѳмами* (§ 75) *соотвѣтственныхъ членовъ геометрической прогрессіи.*

§ 84. Обратная теорема. — Сейчасъ было показано, что система логариѳмовъ по принятому нами опредѣленію (§ 75) можетъ всегда вытекать и изъ разсмотрѣнія двухъ прогрессій, выбранныхъ надлежащимъ образомъ, и такимъ образомъ она войдетъ въ системы, разсмотрѣнныя въ ариѳметикѣ. Также можно показать, что *система логариѳмовъ, будучи опредѣлена посредствомъ двухъ какихъ-нибудь прогрессій, всегда удовлетворитъ и новому опредѣленію* (§ 75).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ опредѣлена система логариѳмовъ посредствомъ двухъ прогрессій:

$$\begin{cases} 1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots \\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ \ldots,\ n\delta,\ \ldots \end{cases}$$

Полагаемъ

$$q^n = \beta, \quad n\delta = \gamma;$$

здѣсь γ есть логариѳмъ β. Второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$n = \frac{1}{\delta};$$

вставляя же это значеніе въ первое уравненіе, получаемъ:

$$q^{\frac{\gamma}{\delta}} = \beta, \text{ или } \left(q^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\gamma} = \beta.$$

Итакъ, γ есть показатель степени, въ которую нужно возвысить постоянное основаніе $q^{\frac{1}{\delta}}$, чтобы получить число β; иначе говоря γ есть логариѳмъ β, взятый по новому опредѣленію въ системѣ съ основаніемъ $q^{\frac{1}{\delta}}$.

V. Различныя системы логариѳмовъ.

§ 85. Какъ перейти отъ одной системы къ другой. — Число a, степени котораго служатъ для составленія всѣхъ чиселъ, называется *основаніемъ* разсматриваемой системы логариѳмовъ. Измѣняя основаніе, измѣнимъ и всѣ логариѳмы, но легко показать, что *новые логариѳмы будутъ пропорціональны прежнимъ т.-е. прежніе логариѳмы умножатся на одно и то же число, которое называется модулемъ новой системы относительно прежней.*

Пусть будутъ a и a' два какихъ-нибудь основанія, а x и x' — логариѳмы одного и того же числа b въ этихъ двухъ системахъ, такъ что

$$a^{x} = b, \tag{1}$$
$$a'^{x'} = b \tag{2}$$

Беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей перваго уравненія въ системѣ съ основаніемъ a':

$$x l_{a'} a = l_{a'} b, \tag{3}$$

при чемъ черезъ $l_{a'}$ обозначаемъ логариѳмъ числа въ этой системѣ. А такъ какъ x есть логариѳмъ числа b въ системѣ съ основаніемъ a, то изъ уравненія (3) слѣдуетъ, что оба логариѳма числа b, въ системахъ съ основаніями: a' и a, находятся въ постоянномъ отношеніи $l_{a'}a$.

Точно такъ же можно было бы взять логариѳмы отъ обѣихъ частей уравненія (2), на этотъ разъ въ системѣ съ основаніемъ a; тогда было бы:

$$x' l_a a' = l_a b,$$

откуда видно, что отношеніе обоихъ логариѳмовъ числа b, взятыхъ соотвѣтственно въ системахъ съ основаніями: a' и a, есть $\frac{1}{l_a a}$. Выше мы нашли, что то же отношеніе равно $l_{a'} a$. Чтобы оба результата совпадали, необходимо равенство:

$$l_a a' = \frac{1}{l_{a'} a}.$$

Оно очевидно; въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$l_a a' = y,$$
$$l_{a'} a = z,$$

можемъ написать, по опредѣленію,

$$a^y = a',$$
$$a'^z = a.$$

Подставляя во второе уравненіе вмѣсто a' его значеніе изъ перваго, получаемъ:

$$(a^y)^z = a^{yz} = a,$$

откуда

$$yz = 1.$$

§ 86. Неперовы логариѳмы.—Логариѳмы были открыты въ началѣ семнадцатаго столѣтія Неперомъ (J. Neper), шотландскимъ барономъ. Основаніе его системы есть несоизмѣримое число e, опредѣленное нами въ **§ 27**-мъ. Эти *логариѳмы* называются *неперовыми* и обозначаются буквою L. *Каллетъ* (*Callet*) внесъ ихъ въ свои таблицы подъ названіемъ *гиперболическихъ логариѳмовъ*. Логариѳмы съ такимъ основаніемъ являются наиболѣе простыми въ математическомъ анализѣ.

Разсмотримъ двѣ прогрессіи:

$$\because\; 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots : (1+\alpha)^m : \ldots,$$
$$\div\; 0 \;.\; \beta \;.\; 2\beta \;.\; 3\beta \;\ldots\ldots\; m\beta \;\ldots\ldots,$$

гдѣ α и β такъ малы, что члены возрастаютъ весьма медленно и что можно разсматривать всѣ числа, какъ члены данной геометрической прогрессіи. Можно систему логариѳмовъ опредѣлить, давая предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$, когда α и β одновременно стремятся къ нулю. Неперъ предположилъ этотъ предѣлъ равнымъ 1. При такомъ предположеніи прогрессіи будутъ:

$$\div\div 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots : (1+\alpha)^m : \ldots,$$
$$\div 0 \,.\, \alpha \,.\, 2\alpha \,.\, 3\alpha \,\ldots\ldots\, m\alpha \,\ldots\ldots$$

Если основаніе есть $(1+\alpha)^m$, то его логариѳмъ $m\alpha$ равенъ единицѣ, откуда $\alpha = \frac{1}{m}$; само же основаніе превратится въ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Когда α стремится къ нулю, m возрастаетъ безпредѣльно и выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ стремится (§ 55) къ числу e, основанію неперовой системы.

§ 87. Обыкновенные логариѳмы.—Неперовы логариѳмы—неудобны при вычисленіяхъ, потому что ихъ основаніе—несоизмѣримо. Поэтому, нѣсколько лѣтъ спустя послѣ опубликованія Неперомъ его открытія, построена была новая таблица логариѳмовъ, названныхъ *обыкновенными*, съ основаніемъ 10. Это—тѣ логариѳмы, употребленіе которыхъ мы показали въ первой части и тамъ же привели различныя ихъ приложенія. Обозначаются они знакомъ log.

Называя черезъ x и y логариѳмы одного и того же числа въ системахъ: неперовой и обыкновенной, мы можемъ написать:

$$e^x = 10^y,$$

откуда, беря логариѳмы въ первой системѣ, получаемъ:

$$x = y\text{L}10, \text{ или } y = \frac{1}{\text{L}10}x.$$

Такимъ образомъ, *чтобы получить логариѳмы чиселъ въ обыкновенной системѣ, умножаютъ неперовы логариѳмы тѣхъ же чиселъ на величину, обратную неперову логариѳму новаго основанія* Этому множителю $\frac{1}{\text{L}10}$ преимущественно присвоено названіе *модуль* обыкновенной системы. Обозначая его буквою M, напишемъ:

$$y = Mx.$$

Если взять логариѳмы обоихъ чиселъ въ обыкновенной системѣ, то получимъ:

$$x \log e = y;$$

слѣдовательно,

$$M = \log e$$

§ 88. Отрицательные логариѳмы.—Если въ уравненіи:

$$a^x = b$$

число b меньше единицы при a, большемъ 1, то его логариѳмъ x — отрицателенъ; дѣйствительно, мы видѣли (**§ 73**), что при измѣненіи x отъ 0 до $-\infty$ выраженіе a^x принимаетъ значенія между 1 и 0, а это показываетъ, что *числа, меньшія единицы, имѣютъ отрицательные логариѳмы.* Эти логариѳмы владѣютъ всѣми свойствами, доказанными выше (**§§ 76** и слѣд.), потому что до сихъ поръ не было сдѣлано никакого ограниченія относительно знака разсматриваемыхъ чиселъ. Замѣтимъ только, что отрицательные логариѳмы непосредственно не находятся при помощи таблицъ, но этимъ не создается никакихъ трудностей при ихъ отысканіи. Дѣйствительно, предположимъ, что число b, меньшее единицы, задано подъ видомъ дроби $\frac{m}{n}$; тогда

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n = -(\log n - \log m),$$

откуда видно, что отрицательный логариѳмъ получается при вычитаніи.

Отрицательныхъ логариѳмовъ при вычисленіяхъ не употребляютъ, потому что, если они и встрѣтятся, ихъ не трудно преобразовать такимъ образомъ, что только характеристика останется отрицательною. Покажемъ это на примѣрѣ:

$$-3{,}4582764 = 4 - 3{,}4582764 - 4 = \bar{4}{,}5417236;$$

итакъ, для этой цѣли *увеличиваютъ характеристику на одну единицу, при чемъ берутъ ее со знакомъ —, а десятичную часть логариѳма (мантиссу) замѣняютъ ея дополненіемъ* (I, **§ 389**).

VI. Рѣшеніе показательныхъ уравненій.

§ 89. Опредѣленіе.—*Показательнымъ уравненіемъ* называется уравненіе вида:

$$a^x = b,$$

гдѣ a и b суть два данныхъ положительныхъ числа. Рѣшить его значитъ найти такое значеніе для x, при которомъ оно удовлетворяется.

§ 90. Рѣшеніе уравненія: $a^x = b$.—Чтобы найти такое значеніе для x, достаточно взять логариѳмы отъ обѣихъ частей уравненія; тогда получимъ:

$$x \log a = \log b,$$

откуда

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Основаніе системы, въ которой взяты здѣсь логариѳмы, — произвольно. Это, впрочемъ, нисколько не вліяетъ на результатъ; дѣйствительно, мы видѣли (§ 85), что при переходѣ отъ одной системы къ другой нужно умножить всѣ логариѳмы на одно и то же число, а потому отношеніе $\frac{\log b}{\log a}$ не измѣнится.

§ 91. Рѣшеніе уравненія: $a^{b^x} = c$.—Тѣмъ же пріемомъ можно рѣшить уравненіе: $a^{b^x} = c$, гдѣ a, b и c суть данныя положительныя числа. Въ самомъ дѣлѣ, беря логариѳмы отъ обѣихъ частей, получаемъ:

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

Для существованія рѣшенія необходимо, чтобы $\log a$ и $\log c$ были одинаковаго знака; въ такомъ случаѣ ихъ можно считать положительными и, беря второй разъ логариѳмы, можно написать:

$$x = \frac{\log\log c - \log\log a}{\log b}.$$

VII. Обобщенiе формулъ, относящихся къ сложнымъ процентамъ.

§ 92. Мы въ первой части сполна изложили приложенiя теорiи логариѳмовъ къ задачамъ на сложные проценты. Возвращаться къ этому мы не будемъ и ограничимся лишь слѣдующимъ замѣчанiемъ.

Было доказано, что капиталъ A, помѣщенный по сложнымъ процентамъ, по истеченiи n лѣтъ обращается въ

$$A(1+r)^n.$$

Соглашенiя, принятыя относительно отрицательныхъ и дробныхъ показателей, позволяютъ теперь обобщить эту формулу.

1. Если n—дробное и дано въ видѣ $\frac{p}{q}$, то мы *предполагаемъ, что принципъ сложныхъ процентовъ распространяется и на части года*. Назовемъ черезъ x прибыль съ 1 франка въ теченiе $\frac{1}{q}$ года; итакъ, 1 франкъ въ концѣ $\frac{1}{q}$ года обратится въ $(1+x)$, а, слѣдовательно, какой-нибудь капиталъ, отданный на то же время, умножится на $(1+x)$. За цѣлый же годъ, равный $\frac{q}{q}$ года, 1 франкъ умножится q разъ на $(1+x)$, или, что то же самое, на $(1+x)^q$; а такъ какъ, съ другой стороны, онъ обращается въ $(1+r)$, то

$$(1+x)^q = 1+r,$$

откуда

$$1+x = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Очевидно, что 1 франкъ, помѣщенный на $\frac{p}{q}$ года, умножится на $(1+x)^p$, т.-е. на $(1+r)^{\frac{p}{q}}$, и слѣдовательно, какой-нибудь капиталъ A обратится въ

$$A(1+r)^{\frac{p}{q}},$$

что и требовалось доказать

2. Если n—отрицательно, то мы разсмотримъ вопросъ съ слѣдующей точки зрѣнiя:

Какой капиталъ былъ помѣщенъ n лѣтъ назадъ, если онъ къ настоящему времени обратился въ сумму A?

Пусть X обозначаетъ искомую величину; этотъ капиталъ, помѣщенный на n лѣтъ, обращается въ A; слѣдовательно, по предыдущему,

$$A = X(1+r)^n,$$

откуда

$$X = A(1+r)^{-n},$$

что совпадаетъ съ формулою, выведенною выше.

КОНСПЕКТЪ

§ 66. Несоизмѣримые показатели.—§§ 67, 68, 69, 70. Леммы о соизмѣримыхъ степеняхъ.—§ 71. Строгое опредѣленіе a^x, когда x — несоизмѣримо.—§ 72. Функція a^x—непрерывна.—§ 73. При измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ и при a положительномъ a^x принимаетъ всевозможныя положительныя значенія и проходитъ каждое изъ нихъ только одинъ разъ.—§§ 74 и 75. Новое опредѣленіе логариѳмовъ.—§ 76. Логариѳмъ произведенія.—§ 77. Логариѳмъ частнаго.—§ 78. Логариѳмъ степени.—§ 79. Логариѳмъ единицы и логариѳмъ основанія.—§ 80. Числа, логариѳмы которыхъ—положительны, и числа, логариѳмы которыхъ—отрицательны.—§ 81. Отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ.—§ 82. Замѣчаніе.—§ 83. Если числа расположены въ геометрической прогрессіи, ихъ логариѳмы образуютъ ариѳметическую прогрессію. Случай, когда вставляютъ новые члены въ прогрессіи.—§ 84. Логариѳмы по опредѣленію, данному въ первой части, совпадаютъ съ логариѳмами, взятыми по новому опредѣленію.—§ 85. Какъ перейти отъ одной системы къ другой.—§ 86. Неперовы логариѳмы; ихъ основаніе.—§ 87. Обыкновенные логариѳмы, ихъ модуль.—§ 88. Отрицательные логариѳмы.—§ 89. Опредѣленіе показательнаго уравненія.—§ 90. Рѣшеніе уравненія: $a^x = b$.—§ 91. Рѣшеніе уравненія: $a^{b^x} = c$.—§ 92. Обобщеніе формулъ, относящихся къ сложнымъ процентамъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Рѣшить уравненія:

$$x^y = y^x,\quad x^p = y^q.$$

Отв.:
$$x = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}},\quad y = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}.$$

II. Рѣшить уравненія:

$$x^y = y^x,\quad p^x = q^y.$$

Отв.:
$$x = \left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{\log q}{\log p - \log q}},\quad y = \left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{\log p}{\log p - \log q}}.$$

III. Рѣшить уравненіе:

$$3^{2x} \times 5^{3x-4} = 7^{x-1} \times 11^{2-x}.$$

Отв.: $$\frac{4\log 5 + 2\log 11 - \log 7}{2\log 3 + 3\log 5 - \log 7 + \log 11}.$$

IV. Рѣшить уравненіе:

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$$

Отв.: при $a > b$

$$x = \frac{\log(a-b)}{\log(a+b)},$$

при $a < b$

$$x = \frac{\log(b-a)}{\log(b+a)}.$$

V. Рѣшить уравненіе:

$$5^{x+1} + 5^{x-2} - 5^{x-3} + 5^{x-4} = 4739.$$

Отв.: $$x = 4 + \frac{\log 4739 - \log 3146}{\log 5}.$$

VI. Рѣшить уравненіе:

$$3^{x^2-4x+5} = 1200.$$

Отв.: $$x = 2 \pm \sqrt{\frac{\log 400}{\log 3}}.$$

VII. Рѣшить уравненіе:

$$7^{2x} - 6.7^x + 5 = 0.$$

Приводится къ рѣшенію одного изъ уравненій:

$$7^x = 1,\ 7^x = 5.$$

VIII. Рѣшить уравненіе:

$$a^1a^3a^5 \ldots a^{2x-1} = n.$$

Отв.: $$x = \sqrt{\frac{\log n}{\log a}}.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Повѣрка алгебраическихъ формулъ

I. Условія тождества двухъ многочленовъ.

§ 93. Лемма. — *Если многочленъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ перемѣнной x, то можно придать этой перемѣнной положительное или отрицательное значеніе, численно на столько малое, что при этомъ значеніи и при всѣхъ значеніяхъ, меньшихъ его, многочленъ принимаетъ и сохраняетъ знакъ своего перваго члена.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ данъ многочленъ:

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots + Hx^t,$$

въ которомъ показатели: m, n, p, ..., t идутъ, возрастая. Его можно написать въ видѣ:

$$Ax^m\left(1 + \frac{B}{A}x^{n-m} + \frac{C}{A}x^{p-m} + \ldots + \frac{H}{A}x^{t-m}\right).$$

Если теперь придать x весьма малое значеніе, то каждый изъ членовъ въ скобкахъ послѣ единицы сдѣлается весьма малымъ, потому что показатели ихъ—положительны; а такъ какъ число членовъ — конечное, то количество, заключенное въ скобки, весьма мало будетъ отличаться отъ единицы. Итакъ, знакъ всего многочлена совпадетъ со знакомъ Ax^m и сохранится при всѣхъ значеніяхъ, меньшихъ x.

§ 94. Теорема I.—*Два многочлена, раціональные и цѣлые относительно x, при всякомъ значеніи x могутъ быть равны только тогда, когда они состоятъ тождественно изъ однихъ и тѣхъ же членовъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ даны два многочлена:

$$Px^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \ldots + P_{m-1}x + P_m, \qquad (1)$$

$$Qx^n + Q_1x^{n-1} + Q_2x^{n-2} + \ldots + Q_{n-1}x + Q_n, \qquad (2)$$

расположенные по степенямъ x. Если они должны быть равны при всякомъ значеніи x, то они будутъ равны и при $x=0$, а въ такомъ случаѣ $P_m = Q_n$. Вычитая изъ данныхъ многочленовъ по по-

слѣднему члену, получимъ остатки также равные, и разность ихъ должна быть равна нулю, каково бы ни было x. Эта разность, будучи расположена по возрастающимъ степенямъ x, первымъ членомъ будетъ имѣть $(P_{m-1}-Q_{n-1})x$. Если бы этотъ членъ не былъ равенъ нулю, то можно было бы по доказанной выше леммѣ придать x такое малое значеніе, что знакъ всей разности совпадетъ со знакомъ этого члена, т.-е. при такомъ значеніи x она не была бы равна нулю; слѣдовательно, $P_{m-1}=Q_{n-1}$. Вычитая изъ многочленовъ равные между собою члены первой степени, увидимъ также, что новая разность начнется съ члена второй степени $(P_{m-2}-Q_{n-2})x^2$, который въ свою очередь долженъ быть равенъ нулю. Продолжая такимъ же образомъ и далѣе, придемъ къ заключенію, что всѣ члены въ обоихъ многочленахъ должны быть одни и тѣ же и въ одномъ и томъ же числѣ.

§ 95. Теорема II. — *Два цѣлыхъ и раціональныхъ многочлена, содержащихъ какое-угодно число произвольныхъ величинъ (буквъ), независящихъ одна отъ другой, могутъ быть равны только тогда, когда они состоятъ тождественно изъ однихъ и тѣхъ же членовъ.*

Чтобы принять эту теорему, достаточно показать, что если она справедлива для двухъ многочленовъ, заключающихъ n произвольныхъ буквъ, то она также будетъ справедлива и для двухъ многочленовъ, содержащихъ $(n+1)$ такихъ буквъ. Разсмотримъ для этого два многочлена, содержащихъ $(n+1)$ буквъ: $x, y, z, u, v, \ldots, p$; расположимъ ихъ по степенямъ одной изъ этихъ буквъ, напр., x, иначе говоря, напишемъ ихъ въ видѣ:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m, \qquad (1)$$
$$B_0x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots+B_n, \qquad (2)$$

гдѣ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ содержатъ n перемѣнныхъ: $y, z, u, v, \ldots, p$. Чтобы многочлены: (1) и (2) были равны при всякомъ x, необходимо (**§ 94**).

$$m=n,\ A_0=B_0,\ A_1=B_1,\ A_2=B_2,\ \ldots,\ A_m=B_n. \qquad (3)$$

А такъ какъ для n перемѣнныхъ теорема допущена справедливою, то изъ равенствъ (3) вытекаетъ, что многочлены: A_0 и B_0, A_1 и $B_1, \ldots, A_m$ и B_n состоятъ соотвѣтственно изъ однихъ и тѣхъ же членовъ, и, слѣдовательно, многочлены: (1) и (2) тождественно равны между собою.

II. Повѣрка равенства двухъ алгебраическихъ выраженій.

§ 96. Случай, когда всѣ произвольныя количества —независимы одно отъ другого.—По предыдущей теоремѣ, чтобы доказать существованіе нѣкотораго уравненія между произвольными количествами, достаточно освободиться отъ радикаловъ и знаменателей и установить, что обѣ его части тождественно состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же членовъ.

Если этого нѣтъ, то можно утверждать, что предложенное равенство справедливо не для всѣхъ значеній буквъ, входящихъ въ него.

§ 97. Случай, когда не всѣ произвольныя количества—независимы.—Когда равенство справедливо только при извѣстной зависимости между буквами, входящими въ него, то для доказательства его справедливости необходимо выразить, на основаніи этой зависимости, нѣкоторыя изъ буквъ въ функціи другихъ, которыя можно принять за независимыя, и подставить эти значенія въ данное уравненіе. Послѣ такой подстановки уравненіе будетъ приведено къ предыдущему случаю.

III. Приложеніе къ нѣкоторымъ задачамъ.

§ 98. Задача I.—*Испытать, можно ли вывести изъ уравненій:*

(1) $$\frac{\gamma}{c_1} + \frac{c}{\gamma_2} = 1, \quad \frac{\gamma_1}{c_2} + \frac{c_1}{\gamma} = 1$$ (2)

уравненіе:

$$cc_1c_2 + \gamma\gamma_1\gamma_2 = 0 \qquad (3)$$

Здѣсь даны два соотношенія, (1) и (2), между шестью количествами: c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2; поэтому необходимо значенія двухъ изъ этихъ шести количествъ выразить въ функціи четырехъ остальныхъ. Изъ уравненія (1) получаемъ:

$$\gamma = \frac{c_1(\gamma_2 - c)}{\gamma_2}; \qquad (4)$$

изъ (2):

$$\gamma_1 = c_2 - \frac{c_1c_2}{\gamma},$$

или, замѣнивъ γ его значеніемъ (4), мы можемъ написать:

$$\gamma_1 = c_2 - \frac{c_2\gamma_2}{\gamma_2 - c},$$

что послѣ приведенія къ одному знаменателю даетъ:

$$\gamma_1 = -\frac{cc_2}{\gamma_2 - c}. \tag{5}$$

Подставляемъ теперь эти значенія въ испытуемое равенство (3):

$$cc_1c_2 - \frac{c_1(\gamma_2 - c)\,cc_2\gamma_2}{\gamma_2(\gamma_2 - c)} = 0;$$

получается тождество, если во второмъ членѣ сократить числителя и знаменателя на общій множитель $(\gamma_2 - c)\gamma_2$.

§ 99 Задача II — *Испытать, будетъ ли равенство:*

$$\frac{ad+bc}{a-b-c+d} = \frac{ac+bd}{a-b+c-d} \tag{1}$$

заключать въ себѣ слѣдующее:

$$\frac{ac-bd}{a-b+c-d} = \frac{a+b+c+d}{4}. \tag{2}$$

По изложенному выше методу нужно изъ равенства (1) выразить значеніе одной изъ четырехъ буквъ, входящихъ въ него, черезъ остальныя и это значеніе подставить въ уравненіе (2), которое послѣ этого должно обратиться въ тождество.

Освобождаемся отъ знаменателей въ уравненіи (1):

$$a^2d - ad(b+d-c) - abc + bc(b+d-c) =$$
$$= a^2c - ac(b+c-d) - abd + bd(b+c-d);$$

переносимъ всѣ члены въ первую часть и располагаемъ по степенямъ a:

$$a^2(d-c) - a(d^2-c^2) - b^2(d-c) + b(d^2-c^2) = 0; \tag{3}$$

раздѣливъ всѣ члены на $(d-c)$, получаемъ,

$$a^2 - a(d+c) - b^2 + b(d+c) = 0,$$

или, что то же самое,

$$a^2 - b^2 - (a-b)(c+d) = 0; \tag{4}$$

дѣлимъ, наконецъ, на $(a-b)$:

$$a+b-c-d=0,$$

откуда

$$a=c+d-b.$$

Вставляемъ теперь это значеніе въ уравненіе (2):

$$\frac{c^2+cd-cb-bd}{2c-2b}=\frac{2c+2d}{4},$$

или

$$\frac{(c-b)(c+d)}{2(c-b)}=\frac{c+d}{2};$$

получилось тождество.

Замѣчаніе.—Мы опустили, въ уравненіяхъ (3) и (4), множителей: $(d-c)$ и $(a-b)$; поэтому, полученный результатъ — справедливъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда эти разности не равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ, можно показать, что какъ при $a=b$, такъ и при $c=d$ уравненіе (1) обращается въ тождество и, потому, не можетъ заключать въ себѣ никакого слѣдствія.

КОНСПЕКТЪ.

§ 93. Лемма о значеніи и знакѣ многочлена, когда перемѣнная принимаетъ весьма малое значеніе.—**§ 94.** Теорема о равенствѣ двухъ многочленовъ, содержащихъ произвольную букву.—**§ 95.** Распространеніе этой теоремы на случай двухъ многочленовъ, содержащихъ какое-угодно число произвольныхъ буквъ.—**§ 96.** Способъ повѣрять уравненіе между различными произвольными количествами.—**§ 97.** Случай, когда такія произвольныя количества связаны нѣкоторыми условіями.—**§§ 98, 99.** Приложеніе къ нѣкоторымъ задачамъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Показать, что уравненіе:

$$x^2+y^2=u^2+v^2$$

вытекаетъ изъ слѣдующихъ двухъ:

$$x+y+u+v=2,$$
$$xy-uv=2-2(u+v).$$

II. Показать, что изъ слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$a+c=2b,\ \frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{c}$$

вытекаетъ пропорція

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

III. Показать, что объемъ сферическаго слоя,

$$\frac{1}{6}\pi H^3+\frac{1}{2}\pi H(R^2+r^2),$$

есть разность объемовъ двухъ сферическихъ сегментовъ, радіусы основаній которыхъ соотвѣтственно равны R и r, т.-е. что онъ равенъ

$$\frac{1}{6}\pi H'^3+\frac{1}{2}\pi H'R^2-\frac{1}{6}\pi h'^3-\frac{1}{2}\pi h'r^2,$$

гдѣ H' и h' удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$H'-h'=H,\ \rho^2=R^2+(\rho-H')^2,\ \rho^2=r^2+(\rho-h')^2,$$

геометрическое значеніе которыхъ—очевидно; ρ есть радіусъ шара.

Къ этимъ тремъ упражненіямъ прилагается общій методъ (§ 91).

IV. Показать, что если существуютъ равенства,

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d},$$

то существуетъ также и слѣдующее равенство:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

V. Пусть S_m обозначаетъ сумму m первыхъ членовъ нѣкоторой геометрической прогрессіи и пусть q есть ея знаменатель, показать, что сумма произведеній по-парно этихъ m членовъ равна $\frac{q}{q+1}S_m S_{m-1}$.

При доказательствѣ исходятъ изъ того положенія, что сумма произведеній по-парно равна полуразности между квадратомъ суммы и суммою квадратовъ.

VI. Данъ рядъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ldots,$$

въ которомъ каждый членъ есть сумма двухъ предыдущихъ; показать, что разность между квадратомъ какого-нибудь члена и произведеніемъ тѣхъ членовъ, между которыми онъ стоитъ, по абсолютной величинѣ равна единицѣ.

Доказываютъ, что эта разность по абсолютной величинѣ—постоянна.

VII. Доказать, что уравненіе:

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}+\sqrt{(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2}=\sqrt{(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2}$$

заключаетъ въ себѣ слѣдующее:

$$\frac{y}{x}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{y-\beta'}{x-\alpha'}.$$

Приводятъ данное уравненіе къ раціональному виду и разлагаютъ обѣ его части на множителей.

VIII. Доказать, что изъ шести уравненій:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, && \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\\
&\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, && \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\\
&\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1, && \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0
\end{aligned}$$

вытекаетъ семь слѣдующихъ:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1, && \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\\
&\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1, && \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0,\\
&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1, && \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,
\end{aligned}$$
$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

Полагаютъ

$$\begin{aligned}
\alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z'&=x,\\
\beta x'+\beta' y'+\beta'' z'&=y,\\
\gamma x'+\gamma' y'+\gamma'' z'&=z
\end{aligned}$$

и выражаютъ двумя способами, пользуясь данными соотношеніями, сумму $x'^2+y'^2+z'^2$ черезъ x, y, z. Для доказательства послѣдняго равенства выводятъ изъ данныхъ соотношеній величину выраженія $\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2$, подъ такимъ видомъ, чтобы при замѣнѣ въ немъ α на β, α' на γ и β'' на γ' сама величина не измѣнялась.

IX. Уравненіе

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}=\frac{1}{a'+x}+\frac{1}{b'+x}$$

справедливо при всякомъ x только тогда, когда a и b соотвѣтственно равны a' и b'.

X. Доказать, что уравненіе:

$$\frac{a}{(b+x)^2+a^2}=\frac{a'}{(b'+x)^2+a'^2}$$

справедливо при всякомъ x только тогда, когда $a=a'$, $b=b'$.

Къ этимъ двумъ упражненіямъ прилагается теорема § 94-го.

XI. Показать, что четыре уравненія:

$$\begin{aligned}
&aa_1+bc=\beta\gamma, && \beta\beta'+bb'=a_1c_1,\\
&a'a_1+b'c'=\beta'\gamma', && \gamma\gamma'+cc'=a_1b_1
\end{aligned}$$

заключаютъ въ себѣ слѣдующее.

$$a_1b_1c_1=aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1+abc+a'b'c'.$$

Искомый результатъ получается при исключеніи β, β', γ, γ' изъ данныхъ уравненій.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

§ 100. Опредѣленіе.—Если требуется по нѣкоторымъ условіямъ составить многочленъ, расположенный по степенямъ данной буквы, то пишутъ этотъ многочленъ, оставляя *неопредѣленными* его коэффиціенты и иногда его степень; такой методъ—наиболѣе простой и наиболѣе естественный. Затѣмъ выражаютъ, что написанный многочленъ удовлетворяетъ даннымъ условіямъ. Такимъ образомъ получаютъ уравненія, въ которыя эти коэффиціенты и эта степень входятъ, какъ неизвѣстныя; изъ этихъ уравненій они и опредѣляются.

Приложимъ этотъ методъ къ дѣленію многочленовъ и къ извлеченію изъ нихъ корней.

I. Дѣленіе многочленовъ.

§ 101. Случай, когда дѣленіе выполняется безъ остатка.—Положимъ, что требуется многочленъ m-ой степени:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m$$

раздѣлить на многочленъ n-ой степени:

$$B_0x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots+B_n.$$

Такъ какъ частное, будучи умножено на дѣлителя, должно дать тождественно дѣлимое, то, обозначая черезъ α степень частнаго, найдемъ, что степень этого произведенія будетъ $(n+\alpha)$, т.-е.

$$m=n+\alpha, \text{ откуда } \alpha=m-n.$$

Зная же степень частнаго, мы будемъ знать и число его коэффиціентовъ, равное $(\alpha+1)$. Обозначая каждый изъ нихъ особою

буквою, можно выполнить произведеніе частнаго на дѣлителя. Это произведеніе, будучи m-ой степени, должно состоять изъ $(m+1)$ членовъ; приравнивая ихъ соотвѣтственнымъ членамъ дѣлимаго, мы получимъ $(m+1)$ уравненій первой степени между $(m-n+1)$ неизвѣстными коэффиціентами. Для опредѣленія послѣднихъ достаточно рѣшить $(m-n+1)$ уравненій; остальныя же n уравненій должны удовлетворяться найденными значеніями и будутъ условными уравненіями.

§ 102. Случай, когда при дѣленіи получается остатокъ. — Чтобы приложить методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ разысканію частнаго и остатка, въ томъ случаѣ, когда дѣленіе точно не выполняется, нужно вопросъ поставить слѣдующимъ образомъ:

Найти многочленъ, произведеніе котораго на дѣлитель, будучи вычтено изъ дѣлимаго, даетъ въ разности многочленъ степени низшей, чѣмъ дѣлитель.

Въ этомъ случаѣ нужно только приравнять соотвѣтственнымъ членамъ дѣлимаго тѣ члены этого произведенія, степень которыхъ не ниже степени n дѣлителя: такимъ образомъ составится $(m-n+1)$ уравненій (такихъ же самыхъ, какъ если бы мы искали точное частное) для опредѣленія всѣхъ коэффиціентовъ частнаго. Разность между дѣлимымъ и произведеніемъ дѣлителя на частное дастъ остатокъ.

§ 103. Вычисленіе коэффиціентовъ частнаго.—$(m-n+1)$ уравненій, опредѣляющихъ частное, представляютъ замѣчательный видъ, благодаря которому они рѣшаются весьма легко. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$C_0x^{m-n}+C_1x^{m-n-1}+C_2x^{m-n-2}+\ldots+C_kx^{m-n-k}+\ldots+C_{m-n}$$

будетъ неизвѣстное частное. Произведеніе этого частнаго на дѣлителя, очевидно, равно

$$B_0C_0x^m+(B_1C_0+B_0C_1)x^{m-1}+(B_2C_0+B_1C_1+B_0C_2)x^{m-2}+\ldots$$
$$+(B_kC_0+B_{k-1}C_1+\ldots+B_1C_{k-1}+B_0C_k)x^{m-k}+\ldots$$

Приравнивая же коэффиціенты этого произведенія коэффиціентамъ дѣлимаго, получимъ:

$$B_0C_0=A_0,\quad B_1C_0+B_0C_1=A_1,\quad B_2C_0+B_1C_1+B_0C_2=A_2,\ \ldots$$
$$B_kC_0+B_{k-1}C_1+\ldots+B_1C_{k-1}+B_0C_k=A_k,\ \ldots$$

Итакъ, первое уравненіе содержитъ одну неизвѣстную C_0; опредѣливъ ее, мы изъ второго уравненія вычислимъ C_1, которое входитъ туда только въ первой степени; зная C_0 и C_1, мы изъ третьяго уравненія вычислимъ C_2, которое входитъ туда также только въ первой степени. Вообще, каждое уравненіе содержитъ въ первой степени одну изъ неизвѣстныхъ, не входящую въ предыдущія уравненія; изъ него мы и опредѣляемъ эту неизвѣстную. Такимъ образомъ, C_k появляется въ первый разъ въ коэффиціентѣ при x^{m-k}, такъ что k первыхъ уравненій не содержатъ этой неизвѣстной. Что же касается до $(k+1)$-го, то оно содержитъ C_k въ первой степени.

§ 104. Приложеніе.—Приложимъ предыдущій методъ къ примѣру. Пусть требуется раздѣлить

$$x^6+A_1x^5+A_2x^4+A_3x^3+A_4x^2+A_5x+A_6$$

на

$$x^2+px+q.$$

Частное должно быть четвертой степени. Обозначаемъ его черезъ

$$x^4+m_1x^3+m_2x^2+m_3x+m_4;$$

составляемъ произведеніе его на дѣлителя:

$$x^6+(p+m_1)x^5+(q+pm_1+m_2)x^4+(qm_1+pm_2+m_3)x^3+$$
$$+(qm_2+pm_3+m_4)x^2+(qm_3+pm_4)x+qm_4.$$

Приравнивая тѣ члены этого произведенія, степень которыхъ выше единицы, соотвѣтственнымъ членамъ дѣлимаго, получаемъ для опредѣленія m_1, m_2, m_3, m_4 уравненія:

$$p+m_1=A_1,\ q+pm_1+m_2=A_2,\ qm_1+pm_2+m_3=A_3,$$
$$qm_2+pm_3+m_4=A_4.$$

Изъ перваго опредѣляемъ m_1; изъ второго, зная m_1, опредѣляемъ m_2; далѣе, изъ третьяго—m_3; и, наконецъ, изъ четвертаго—m_4. Не трудно замѣтить, что этотъ методъ приводитъ къ тѣмъ же самымъ вычисленіямъ, что и методъ, изложенный въ первой части.

II. Извлеченіе корня m-ой степени изъ многочлена.

§ 105. Общій методъ.—Пусть будетъ данъ многочленъ:

$$A_0x^p + A_1x^{p-1} + A_2x^{p-2} + \ldots + A_p$$

Обозначаемъ корень m-ой степени изъ него черезъ

$$B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_n.$$

По опредѣленію должно существовать тождество:

$$(B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_n)^m =$$
$$= A_0x^p + A_1x^{p-1} + A_2x^{p-2} + \ldots + A_p.$$

Такъ какъ обѣ части должны быть одной и той же степени, то необходимо, чтобы

$$p = mn.$$

Итакъ, если p не есть кратное m, задача—невозможна. Если же p дѣлится на m, то степень искомаго многочлена будетъ $\frac{p}{m}$; слѣдовательно, число его коэффиціентовъ равно $\left(\frac{p}{m} + 1\right)$. Можно этотъ многочленъ возвысить въ m-ую степень; тогда составится многочленъ степени p. Приравнивая $\left(\frac{p}{m} + 1\right)$ первыхъ его членовъ соотвѣтственнымъ членамъ даннаго многочлена, получимъ $\left(\frac{p}{m} + 1\right)$ уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ. Найденными значеніями должны удовлетворяться уравненія, выражающія равенство между остальными членами, если только задача — возможна; это —уравненія условныя.

§ 106. Вычисленіе коэффиціентовъ искомаго корня.—$\left(\frac{p}{m} + 1\right)$ уравненій, опредѣляющихъ этотъ искомый многочленъ, представляютъ замѣчательный видъ, благодаря которому они рѣшаются весьма легко. Въ самомъ дѣлѣ, въ разложеніи:

$$(B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_kx^{n-k} + \ldots + B_n)^m,$$

гдѣ n равно $\frac{p}{m}$, членъ съ x^p содержитъ только B_0^m; членъ съ x^{p-1}

содержитъ B_0 въ $(m-1)$-ой степени и B_1 въ первой степени; членъ съ x^{p-2} содержитъ B_0, B_1 и B_2, при чемъ эту послѣднюю неизвѣстную только въ первой степени. Вообще, B_k не входитъ ни въ одинъ членъ, степень котораго выше $(p-k)$ и оно входитъ въ первой степени въ коэффиціентъ члена съ x^{p-k}. Слѣдовательно, первое уравненіе $B_0^m = A_0$ даетъ B_0 посредствомъ извлеченія корня; зная B_0, мы опредѣлимъ B_1 изъ второго уравненія, куда оно входитъ только въ первой степени, зная B_0 и B_1, мы опредѣлимъ B_2 изъ третьяго уравненія, куда оно входитъ также только въ первой степени. И, вообще, мы опредѣлимъ B_k изъ $(k+1)$-го уравненія, куда оно входитъ только въ первой степени; дѣйствительно, въ разложеніи только членъ съ x^{p-k} содержитъ B_k; этотъ членъ есть $mB_kx^{n-k}(B_0x^n)^{m-1}$.

Въ частномъ случаѣ, этотъ методъ легко прилагается къ извлеченію квадратнаго корня изъ многочлена.

III. Приложеніе къ нѣкоторымъ задачамъ.

§ 107. Задача I.—*Найти необходимую зависимость между p и q, чтобы трехчленъ*

$$x^3+px+q$$

дѣлился на квадратъ двучлена $(x-\alpha)$, выбраннаго надлежащимъ образомъ.

Пусть $(x+\beta)$ обозначаетъ частное отъ этого дѣленія; въ такомъ случаѣ

$$x^3+px+q=(x-\alpha)^2(x+\beta)=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x+\beta)=$$
$$=x^3+(\beta-2\alpha)x^2+(\alpha^2-2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta.$$

Такъ какъ это —тождество, то

$$\beta-2\alpha=0,\ \alpha^2-2\alpha\beta=p,\ \alpha^2\beta=q.$$

Замѣняя въ этихъ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ β его значеніемъ 2α, получаемымъ изъ перваго уравненія, находимъ:

$$\alpha^2-4\alpha^2=p,\ \text{или}\ \alpha=\sqrt{-\frac{p}{3}},$$
$$2\alpha^3=q.$$

Исключаемъ, наконецъ, a изъ этихъ двухъ уравненій:

$$q=2\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3, \text{ или } 4p^3+27q^2=0.$$

Такимъ образомъ искомое условіе найдено.

§ 108. Задача II.—*Опредѣлить коэффиціенты m и n такимъ образомъ, чтобы выраженіе*

$$mx^3-(2m^2+3n)x^2+(m^3+6mn)x-3m^2n$$

представляло полный кубъ.

Для этого необходимо приравнять тождественно данное выраженіе кубу двучлена $(ax+b)$, т.-е. многочлену:

$$a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3,$$

что даетъ уравненія:

$$m=a^3,\ -(2m^2+3n)=3a^2b,\ m^3+6mn=3ab^2,\ -3m^2n=b^3.$$

Изъ двухъ послѣднихъ получаемъ:

$$b=-\sqrt[3]{3m^2n},\quad a=\frac{m^3+6mn}{3\sqrt[3]{9m^4n^2}}=\frac{m^2+6n}{3\sqrt[3]{9mn^2}}.$$

Опредѣливъ такимъ образомъ a и b, мы должны считать оставшіяся два уравненія условными.

Если подставить туда на мѣсто a и b найденныя значенія, то эти уравненія обратятся въ слѣдующія:

$$m=\frac{(m^2+6n)^3}{27\cdot 9mn^2}, \tag{1}$$

$$2m^2+3n=\frac{3(m^2+6n)^2\sqrt[3]{3m^2n}}{9\sqrt[3]{81m^2n^4}}=\frac{(m^2+6n)^2}{3\sqrt[3]{27n^3}}=\frac{(m^2+6n)^2}{9n}. \tag{2}$$

Освобождаемся въ послѣднемъ уравненіи отъ знаменателей и переносимъ всѣ члены въ первую часть:

$$m^4-6nm^2+9n^2=0,$$

[redacted]

$$(m^2-3n)^2=0.$$

Отсюда получаемъ единственное значеніе для n:

$$n = \frac{m^2}{3}. \qquad (3)$$

Это значеніе, подставленное въ уравненіе (1), обращаетъ его въ тождество. Слѣдовательно, искомое условіе приводится къ соотношенію (3), и предложенный многочленъ будетъ кубомъ выраженія:

$$x\sqrt[3]{m} - n\sqrt[3]{m},$$

въ чемъ не трудно удостовѣриться.

КОНСПЕКТЪ.

§ 100 Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ прилагается къ такимъ вопросамъ, въ которыхъ требуется составить многочленъ по нѣкоторымъ условіямъ.—§ 101. Приложеніе этого метода къ теоріи дѣленія въ случаѣ, когда дѣленіе совершается безъ остатка.—§ 102. Случай, когда требуется найти частное и остатокъ.—§ 103. Уравненія, какія приходится рѣшать въ этомъ случаѣ, всѣ—первой степени съ одною неизвѣстною.—§ 104. Приложеніе къ примѣру.—§ 105. Приложеніе этого метода къ разысканію корня m-ой степени изъ многочлена.—§ 106. Уравненія, какія приходится рѣшать въ этомъ случаѣ, всѣ—первой степени съ одною неизвѣстною.—§§ 107, 108. Приложеніе метода неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Найти условія, при которыхъ многочленъ:

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2$$

былъ квадратомъ многочлена, цѣлаго относительно x.

Необходимо, чтобы

$$m + 1 = q - \frac{p^2}{4}.$$

II. Опредѣлить условіе, при которомъ многочленъ:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F$$

былъ бы произведеніемъ двухъ выраженій первой степени относительно x и y.

Необходимо, чтобы

$$(BD - 2AE)^2 = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF).$$

III. На основаніи предыдущаго разложить на множителей многочленъ:

$$2x^2 - 21xy - 11y^2 - x + 34y - 3.$$

Отв.:

$$(2x + y - 3)(x - 11y + 1)$$

IV. Представить выраженіе $4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ подъ видомъ разности квадратовъ двухъ многочленовъ второй степени, цѣлыхъ относительно x.

Отв.:

$$(2x^2 + x + 2)^2 - 5x^2.$$

V. Опредѣлить условія, при которыхъ выраженіе:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - k(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)$$

было бы квадратомъ многочлена первой степени относительно x и y.

Если $a > b$, то необходимо, чтобы $k = \frac{1}{a^2}$, $\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $\beta = 0$; многочленъ будетъ квадратомъ $a \pm \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Если $a < b$, то необходимо, чтобы $k = \frac{1}{b^2}$, $\alpha = 0$, $\beta = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$; многочленъ будетъ квадратомъ $b \pm \frac{y\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$.

VI. Представить $(Ax^2 + 2Bxy + Cx^2)$ подъ видомъ $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2$. Всегда ли это возможно? Одно или нѣсколько рѣшеній?

Безчисленное множество рѣшеній. Чтобы они были вещественными, необходимо, чтобы

$$A > 0,\ C > 0,\ AC > B^2.$$

VII. Представить $(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3)$ подъ видомъ $(\alpha x + \beta y)^3 + (\gamma x + \delta y)^3$.

Приравнявъ тождественно другъ другу оба многочлена, принимаютъ за вспомогательную неизвѣстную $\omega = \alpha\delta - \beta\gamma$; вычисляютъ выраженія: $AC - B^2$, $BD - C^2$, $AD - BC$ и, наконецъ, $(AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2)$; это послѣднее выраженіе равно ω^6, откуда узнается ω. Изъ остальныхъ выраженій получаютъ $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ и $\alpha\delta + \beta\gamma$. Послѣ этого не трудно получить α, β, γ и δ.

КНИГА II.

Теорія производныхъ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Составленіе производныхъ явныхъ функцій отъ одной перемѣнной.

I. Предварительныя понятія.

§ 109. Опредѣленія. — Когда перемѣнная y зависитъ отъ другой перемѣнной x такимъ образомъ, что каждому произвольному значенію x соотвѣтствуетъ единственное и опредѣленное значеніе y, то говорятъ, что y есть *функція* отъ x; эту зависимость обозначаютъ символомъ:

$$y = f(x).$$

Количество x называется *независимою перемѣнною*, потому что ему можно придавать по произволу какой-угодно рядъ значеній.

Когда перемѣнная x получаетъ два значенія: a и $a+h$, то h называется *приращеніемъ* этой перемѣнной; функція въ этомъ случаѣ приметъ два соотвѣтственныхъ значенія: $f(a)$ и $f(a+h)$; положительная или отрицательная разность: $f(a+h)-f(a)$ называется соотвѣтственнымъ *приращеніемъ* функціи.

Функція — *непрерывна*, если h можно придать на столько малое значеніе, что приращеніе функціи будетъ сколь-угодно малымъ. Въ этомъ отдѣлѣ будетъ говориться только о непрерывныхъ функціяхъ.

§ 110. Разложеніе цѣлой функціи $f(x+h)$ по степенямъ h.—Многочленъ, цѣлый относительно буквы x и обозначаемый въ общемъ видѣ посредствомъ

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_nx^{m-n}+\ldots+A_m,$$

послѣ замѣны въ немъ x на $x+h$, обратится въ:

$$f(x+h)=A_0(x+h)^m+A_1(x+h)^{m-1}+\ldots+A_n(x+h)^{m-n}+\ldots+A_m.$$

Если теперь раскрыть каждый членъ по формулѣ бинома и расположить весь многочленъ по восходящимъ степенямъ h, то получимъ:

$$\begin{array}{llll}
A_0x^m & +mA_0x^{m-1} & +m(m-1)A_0x^{m-2} & +\ldots+m(m-1)\ldots2.1A_0\dfrac{h^m}{1.2\ldots m}, \\
+A_1x^{m-1} & +(m-1)A_1x^{m-2} & +(m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & \\
+A_2x^{m-2} & +(m-2)A_2x^{m-3} & +(m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
+A_nx^{m-n} & +(m-n)A_nx^{m-n-1} & +(m-n)(m-n-1)A_nx^{m-n-2} & \\
\vdots & \vdots & & \\
+A_{m-1}x & +A_{m-1} & & \\
+A_m & \left.\right|h & \left.\right|\dfrac{h^2}{1.2} &
\end{array}$$

Члены, не зависящіе отъ h, т.-е. такіе, къ которымъ приводится все выраженіе при $h=0$, образуютъ, какъ это и должно было случиться, заданный многочленъ. Коэффиціентъ при h, представляющій многочленъ $(m-1)$-ой степени относительно x, есть *производная* отъ заданнаго многочлена; и если многочленъ обозначенъ черезъ $f(x)$, то производная обыкновенно обозначается черезъ $f'(x)$. Коэффиціентъ при $\frac{h^2}{1.2}$, представляющій многочленъ $(m-2)$-ой степени, есть *вторая производная* отъ заданнаго многочлена; она обозначается черезъ $f''(x)$. Точно такъ же коэффиціенты при $\frac{h^3}{1.2.3}, \ldots, \frac{h^m}{1.2\ldots m}$, представляющіе многочлены все низшей и низшей степени, суть *третья, четвертая,..., m-ая производная* отъ заданнаго многочлена; ихъ обозначаютъ черезъ $f'''(x), \ldots, f^m(x)$. Согласно съ этими обозначеніями предыдущее разложеніе можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{m-1}(x)+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^m(x).$$

Каждый изъ многочленовъ: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x), \ldots, f^m(x)$ выводится изъ предшествующаго по одному и тому же весьма простому закону. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая многочленъ:

$$f'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1},$$

замѣчаемъ непосредственно, что *для его составленія нужно уменьшить на единицу показателя каждаго изъ членовъ $f(x)$, а коэффиціенты умножить на соотвѣтственныхъ неуменьшенныхъ показателей.* То же относится и къ многочленамъ $f''(x)$, $f'''(x), \ldots$, т.-е. $f''(x)$ есть производная отъ $f'(x)$, $f'''(x)$—отъ $f''(x)$, и т. д.; поэтому $f''(x)$ и называется *второю производною отъ $f(x)$, $f'''(x)$—третьею производною*, и т. д.

Каждая изъ производныхъ—низшей степени, чѣмъ предыдущая, такъ что m-ая производная отъ многочлена m-ой степени есть величина постоянная, и $(m+1)$-ой производной уже не существуетъ.

§ 111. Свойство производной отъ цѣлой функціи.—Только-что данное опредѣленіе производной прилагается только къ цѣлымъ и раціональнымъ многочленамъ, но, несмотря на это, мы выведемъ изъ него одно важное свойство, которое затѣмъ и примемъ за опредѣленіе; это второе опредѣленіе дастъ возможность распространить понятіе производной на выраженія другого вида.

Обозначая черезъ $F(x)$ многочленъ, цѣлый относительно x, мы можемъ написать (§ 110):

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m}F^m(x),$$

откуда выводимъ, что

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2}F''(x) + \frac{h^2}{1.2.3}F'''(x) + \ldots$$

Если теперь мы станемъ h подводить къ нулю, оставляя x безъ измѣненія, то вторая часть равенства, очевидно, будетъ имѣть предѣломъ $F'(x)$; слѣдовательно, и первая часть будетъ стремиться къ тому же предѣлу, т.-е.

$$F'(x) = \lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Этотъ результатъ можно прочесть слѣдующимъ образомъ:

Производная отъ многочлена $F(x)$ есть предѣлъ отношенія приращенія $F(x+h)-F(x)$ этого многочлена къ приращенію h перемѣнной, когда это послѣднее приращеніе безпредѣльно убываетъ.

§ 112. Новое опредѣленіе производной. — Предыдущее свойство въ послѣдующемъ изложеніи мы и будемъ принимать за опредѣленіе производной, т.-е. будемъ опредѣлять ее такъ:

Производною какой-нибудь непрерывной функціи называется предѣлъ, къ которому стремится отношеніе приращенія этой функціи къ приращенію перемѣнной, когда это послѣднее стремится къ нулю.

По предыдущему это опредѣленіе прилагается къ цѣлымъ функціямъ; кромѣ того, оно даетъ возможность распространить понятіе производной на какую-угодно функцію.

Можно спросить, будетъ ли имѣть производную какая-угодно непрерывная функція $f(x)$. Сначала мы отвѣтимъ на этотъ вопросъ, въ слѣдующихъ параграфахъ, относительно производныхъ отъ главныхъ функцій; мы докажемъ ихъ существованіе *à posteriori*. Кромѣ того замѣтимъ, что если функція—непрерывна, то уравненіе $y=f(x)$ представитъ непрерывную плоскую кривую, отнесенную къ двумъ прямоугольнымъ осямъ; въ аналитической же геометріи доказывается, что производная есть tg угла, образуемаго съ осью Ox касательною къ кривой въ точкѣ (x, y), и такъ какъ непрерывная кривая имѣетъ вполнѣ опредѣленную касательную, то сама функція будетъ имѣть производную.

Производная отъ какой-нибудь функціи есть новая функція, которая также будетъ имѣть производную: это—вторая производная. Производная отъ этой послѣдней есть третья производная, и т. д.

Мы начнемъ съ разысканія производныхъ отъ двухъ весьма простыхъ функцій: a^x и $\log x$.

II. Производныя отъ a^x и отъ $\log x$.

§ 113. Производная отъ a^x.—Производная отъ a^x, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія:

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h},$$

когда h стремится къ нулю. А такъ какъ

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

то для полученія искомой производной нужно отыскать предѣлъ отношенія:

$$\frac{a^x(a^h-1)}{h}.$$

Полагаемъ

$$a^h-1=\frac{1}{n}.$$

При h весьма маломъ a^h весьма мало отличается отъ единицы (§ 73), а слѣдовательно, n дѣлается весьма большимъ. Когда h стремится къ нулю, n стремится къ безконечности. Изъ послѣдняго равенства вытекаетъ:

$$a^h=1+\frac{1}{n};$$

беря логариѳмы отъ обѣихъ частей, получаемъ:

$$h\log a=\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$h=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log a}.$$

А въ такомъ случаѣ предыдущее отношеніе мы можемъ написать въ видѣ:

$$a^x\frac{\frac{1}{n}}{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log a}}=\frac{a^x\log a}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)};$$

здѣсь числитель не содержитъ n, поэтому достаточно отыскать предѣлъ знаменателя. Преобразовываемъ его:

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

при безпредѣльномъ увеличеніи n выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ e и, слѣдовательно, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ $\log e$, все же выраженіе $\frac{a^x\log a}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ будетъ имѣть предѣломъ $\frac{a^x\log a}{\log e}$. Это и есть производная отъ a^x. Такимъ образомъ

$$(a^x)'=\frac{a^x\log a}{\log e}. \tag{1}$$

Можно замѣтить, что основаніе системы, въ которой взяты логариѳмы, пока не было задано; поэтому, выборъ его не повліяетъ на результатъ; дѣйствительно, отношеніе $\frac{\log a}{\log e}$ не зависитъ отъ основанія разсматриваемой системы (§ 85). Если предположить, что логариѳмы взяты въ неперовой системѣ, то $\log e = 1$ и производная напишется въ такомъ видѣ:

$$(a^x)' = a^x \mathrm{L}a. \tag{2}$$

Итакъ, *производная отъ показательной функціи получается посредствомъ умноженія этой функціи на неперовъ логариѳмъ основанія.*

Для функціи e^x послѣдняя формула еще болѣе упрощается, такъ какъ $\mathrm{L}e = 1$; слѣдовательно, *производная отъ e^x есть сама функція:*

$$(e^x)' = e^x. \tag{3}$$

§ 114. Производная отъ $\log x$.—Производная отъ $\log x$, по опредѣленію, есть предѣлъ выраженія:

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

при h, стремящемся къ нулю. Преобразовываемъ числитель:

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right);$$

поэтому

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Полагаемъ теперь $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$; въ такомъ случаѣ, когда h будетъ стремиться къ нулю, n будетъ стремиться къ ∞. Изъ этого равенства выходитъ, что $h = \frac{x}{n}$, и выраженіе, предѣлъ котораго мы ищемъ, перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{x} \cdot n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Въ **§ 113**-мъ мы видѣли, что при n, стремящемся къ ∞, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

будетъ имѣть предѣломъ $\log e$. Слѣдовательно, предѣлъ $\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ есть $\frac{\log e}{x}$, что и представляетъ производную отъ $\log x$. Итакъ,

$$(\log x)' = \frac{\log e}{x} = \frac{M}{x}, \tag{4}$$

гдѣ M обозначаетъ модуль системы, въ которой взятъ логариѳмъ отъ x.

Если данная функція есть неперовъ логариѳмъ отъ x, то $M=1$, отсюда заключаемъ, что

$$(\mathrm{L}x)' = \frac{1}{x}. \tag{5}$$

Найдя производныя двухъ простѣйшихъ функцій: $\log x$ и a^x, мы дадимъ нѣсколько общихъ правилъ, по которымъ мы составимъ производныя отъ болѣе сложныхъ выраженій.

III. Общія правила.

§ 115. Производная отъ суммы. — Пусть u, v, w — такія функціи отъ x, производныя отъ которыхъ u', v' w' — извѣстны; *производная отъ суммы:*

$$u+v-w$$

будетъ сумма:

$$u'+v'-w'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если мы обозначимъ, вообще, приращеніе какого-нибудь количества черезъ Δ и справа припишемъ букву, изображающую это количество, то въ то время какъ перемѣнная x получитъ приращеніе Δx, функціи: u, v, w получатъ соотвѣтственно приращенія: Δu, Δv, Δw; приращеніе же суммы $(u+v-w)$, очевидно, будетъ:

$$\Delta u + \Delta v - \Delta w;$$

отсюда заключаемъ, что отношеніе этого приращенія къ приращенію Δx перемѣнной выразится черезъ

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

и, слѣдовательно, предѣломъ будетъ имѣть:

$$u' + v' - w',$$

что и требовалось доказать. Итакъ,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'. \tag{6}$$

§ 116. Опредѣленіе функціи отъ функціи.—Вообще, *явною* функціею отъ перемѣнной называютъ результатъ точно опредѣленныхъ дѣйствій, выполненныхъ надъ этою перемѣнною. Такъ, напр.,

$$x^m, \ \lg\sqrt{1+x^2}, \ \log\sin x, \ a^{x^3}$$

суть функціи отъ x. Замѣтимъ, что число послѣдовательныхъ дѣйствій можетъ быть сколь-угодно большимъ.

Пусть u обозначаетъ какую-нибудь функцію отъ x; если выполнить рядъ дѣйствій надъ количествомъ u, разсматривая его какъ данное, то результатъ указанныхъ дѣйствій, по предыдущему, есть функція отъ u; а такъ какъ u само есть функція отъ x, то этотъ результатъ есть *функція отъ функціи*.

Понятно, что при замѣнѣ u его выраженіемъ черезъ x функція отъ функціи обратится въ обыкновенную функцію.

Примѣры: 1) $$(x^2)^3 = x^6$$

можетъ быть разсматриваемо, или какъ функція отъ функціи, т.-е. какъ кубъ x^2, или же какъ простая функція x^6.

2) $$\log a^x = x \log a$$

можетъ быть разсматриваемо, или какъ функція отъ функціи, т.-е. какъ логариѳмъ функціи a^x, или же какъ простая функція первой степени $x\log a$.

Поэтому, если даже не выполнять преобразованій, аналогичныхъ предыдущимъ, то по существу функція отъ функціи ничѣмъ не будетъ отличаться отъ тѣхъ функцій, которыя зависятъ непосредственно отъ главной перемѣнной.

§ 117. Производная функціи отъ функціи.—Если обозначить черезъ u функцію $\varphi(x)$ отъ перемѣнной x и черезъ w функцію $\psi(u)$ отъ перемѣнной u, то, по предыдущимъ опредѣленіямъ, w будетъ функціей отъ функціи, опредѣляемая уравненіями:

$$u = \varphi(x), \ w = \psi(u).$$

Мы покажемъ, что если функціи: φ и ψ—таковы, что мы съумѣемъ взять отъ нихъ производныя по той перемѣнной, отъ которой онѣ зависятъ непосредственно, то мы съумѣемъ составить производную отъ w и по x.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что x придано приращеніе Δx, тогда для u получится приращеніе Δu и для w — приращеніе Δw. Пишемъ тождество:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

По опредѣленію, при Δx, стремящемся къ нулю, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ будутъ имѣть предѣлами соотвѣтственно производныя отъ w и отъ u по x. Что касается $\frac{\Delta w}{\Delta u}$, то хотя u и не есть независимая перемѣнная, а функція отъ x, измѣненія которой зависятъ отъ измѣненій x, это выраженіе все-таки будетъ имѣть предѣломъ производную отъ w по u. Дѣйствительно, въ опредѣленіи производной отъ функціи ничто не указываетъ на то, какимъ образомъ приращеніе перемѣнной стремится къ нулю; поэтому, если обозначить производныя отъ w по x и по u соотвѣтственно черезъ w' и $\psi'(u)$, а производную отъ u по x черезъ $\varphi'(x)$ и припомнить, что предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, то

$$w' = \psi'(u) \times \varphi'(x). \tag{7}$$

Полученный результатъ можно прочесть слѣдующимъ образомъ:

Производная функціи отъ функціи есть произведеніе производныхъ отъ простыхъ функцій, образующихъ данную, взятыхъ, каждая, по той перемѣнной, отъ которой она зависитъ непосредственно.

§ 118. Примѣры: 1) Дана функція:

$$(x^2)^3;$$

по предыдущей формулѣ здѣсь

$$u = x^2,\ w = u^3.$$

Для составленія производной этой функціи отъ функціи нужно, какъ мы видѣли, взять производную отъ u^3 по u, что будетъ равно $3u^2$, и умножить ее на производную отъ x^2 по x, равную $2x$; слѣ-

довательно, искомая производная будетъ $3u^2 \times 2x$, или, послѣ замѣны u его значеніемъ,

$$3x^4 \times 2x = 6x^5;$$

мы получили бы точно такой же результатъ, если бы замѣнили функцію отъ функціи простою функціею x^6 (§ 110).

2) Разсмотримъ еще функцію:

$$\log x^5.$$

Здѣсь

$$u = x^5,\ w = \log u.$$

Производная этой функціи отъ функціи есть произведеніе $5x^4$, производной отъ x^5, на $\frac{\log e}{u}$, производной отъ $\log u$ по u; слѣдовательно, она равна

$$\frac{5x^4 \log e}{x^5} = \frac{5 \log e}{x}.$$

Мы получили бы точно такой же результатъ, если бы воспользовались равенствомъ:

$$\log x^5 = 5 \log x;$$

дѣйствительно, производная отъ $5\log x$, очевидно, равна производной отъ $\log x$, увеличенной въ пять разъ.

Оба предыдущихъ примѣра подобраны такимъ образомъ, что получаемый результатъ — извѣстенъ заранѣе; въ большинствѣ же случаевъ правило функцій отъ функцій приводитъ къ совершенно новымъ результатамъ и было бы трудно получить ихъ другимъ путемъ. Ищемъ, напр., производную отъ e^{x^2}, полагая

$$x^2 = u,\ w = e^u.$$

Искомая производная есть произведеніе $2x$, производной отъ u по x, на e^u, производную отъ e^u по u; слѣдовательно, она равна

$$2xe^{x^2}.$$

§ 119. Обобщеніе.—Можно обобщить правило функцій отъ функцій и распространить его на выраженія, зависящія отъ перемѣнной x посредствомъ нѣсколькихъ промежуточныхъ функцій. Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ:

$$u = \varphi(x),\ v = \psi(u),\ w = f(v),\ z = F(w)$$

и ищемъ производную отъ z по x. Пусть Δx есть приращеніе, придаваемое x, и пусть Δu, Δv, Δw, Δz будутъ соотвѣтственными приращеніями для u, v, w, z. Пишемъ тождество:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

когд Δx стремится къ нулю, то первая часть будетъ имѣть предѣломъ производную отъ z по x, а множители второй части будутъ стремиться къ производнымъ отъ функцій z, w, v, u по тѣмъ перемѣннымъ, отъ которыхъ эти функціи зависятъ непосредственно. Отсюда заключаемъ, что *производная отъ z по x есть также произведеніе, получаемое отъ перемноженія производныхъ различныхъ функцій. z, w, v, u, взятыхъ, каждая, по той перемѣнной, отъ которой она зависитъ непосредственно*. Такимъ образомъ

$$z = F'(w') \times f'(v) \times \psi(u) \times \varphi(x). \tag{8}$$

§ 120. Производная отъ произведенія.—Пусть u, v, w, . . . обозначаютъ функціи въ какомъ-угодно числѣ и пусть z будетъ ихъ произведеніемъ, отъ котораго требуется найти производную. Беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства:

$$z = u \cdot v \cdot w \ldots;$$

получаемъ:

$$\log z = \log u + \log v + \log w + \ldots$$

Беремъ теперь производныя отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства по правилу функцій отъ функцій (§ 117), обозначая при этомъ производныя отъ z, u, v, w,... соотвѣтственно черезъ z', u', v', w',...; получаемъ:

$$\frac{\log e}{z} z' = \frac{\log e}{u} u' + \frac{\log e}{v} v + \frac{\log e}{w} w' + \ldots,$$

откуда

$$\frac{z'}{z} = \frac{u}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots;$$

умножаемъ, наконецъ, обѣ части полученнаго равенства на z, или, что то же самое, на $uvw \ldots$:

$$z' = vw \ldots u' + uw \ldots v' + uv \ldots w' + \ldots \tag{9}$$

Итакъ, *производная отъ произведенія есть сумма произведеній, по-*

лучаемыхъ отъ умноженія въ послѣдовательномъ порядкѣ производной каждаго множителя на произведеніе всѣхъ остальныхъ множителей.

Если какой-нибудь множитель — постоянная величина, то его производная равна нулю, и въ производной отъ произведенія соотвѣтственнаго члена не будетъ. Такъ, напр., производная отъ Au есть Au'.

§ 121. Производная отъ частнаго. — Пусть u и v будутъ двѣ функціи отъ x, а z — ихъ частное, отъ котораго требуется найти производную. Беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства:

$$z = \frac{u}{v};$$

получаемъ:

$$\log z = \log u - \log v.$$

Беремъ теперь производныя отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь предыдущими обозначеніями; получаемъ:

$$\frac{\log e}{z} z' = \frac{\log e}{u} u' - \frac{\log e}{v} v',$$

откуда

$$z' = \frac{z}{u} u' - \frac{z}{v} v' = \frac{1}{v} u' - \frac{u}{v^2} v',$$

или, наконецъ,

$$z' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \qquad (10)$$

Итакъ, *производная отъ частнаго получается посредствомъ умноженія знаменателя на производную числителя, затѣмъ числителя на производную знаменателя, и дѣленія разности этихъ произведеній на квадратъ знаменателя.*

§ 122. Производная отъ степени. — Пусть u есть функція отъ x и m -показатель, цѣлый или дробный, положительный или отрицательный, обозначимъ черезъ z степень u^m и отыщемъ ея производную. Беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства:

$$z = u^m;$$

получаемъ:

$$\log z = m \log u$$

Беремъ теперь производныя отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь прежними обозначеніями; получаемъ:

$$\frac{\log e}{z} z' = m \frac{\log e}{u} u,$$

откуда

$$z = m \frac{z}{u} u,$$

или, наконецъ,

$$z' = mu^{m-1}u'. \tag{11}$$

Итакъ, *производная отъ степени какой-нибудь функціи получается посредствомъ умноженія производной отъ разсматриваемой функціи на ея показателя и на ту же функцію въ степени на единицу ниже*

Замѣчаніе I. — Въ случаѣ m цѣлаго это правило можетъ быть выведено изъ теоремы функцій отъ функцій; дѣйствительно, если u есть функція отъ x, то u^m есть такая функція отъ функціи, отъ которой производная по u намъ извѣстна (§ 110): она равна mu^{m-1}.

Замѣчаніе II. - Если въ предыдущей формулѣ положить $u = x$, то получится производная отъ x^m, равная mx^{m-1}. Слѣдовательно, эта производная при m цѣломъ выражается тою же самою формулою.

Слѣдствіе. Если $z = \sqrt{u}$ то пишутъ:

$$z = u^{\frac{1}{2}}$$

и прилагаютъ предыдущее правило:

$$z' = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u',$$

или

$$z' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}. \tag{12}$$

Итакъ, *производная отъ квадратнаго корня изъ нѣкоторой функціи получается посредствомъ дѣленія производной отъ этой функціи на удвоенный корень.*

§ 123. **Производная отъ u^v.** — Разсмотримъ, наконецъ, выраженіе болѣе сложное, въ которомъ и показатель есть функція отъ перемѣнной x: отыщемъ производную отъ u^v, гдѣ и u, и v — какія-нибудь функціи отъ x. Полагаемъ

$$z = u^v$$

и беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\log z = v \log u.$$

Беремъ теперь производныя отъ обѣихъ частей, пользуясь правиломъ для производной отъ произведенія; получаемъ:

$$\frac{\log e}{z} z' = v' \log u + \frac{v \log e}{u} u',$$

откуда

$$z' = z\left(\frac{v' \log u}{\log e} + \frac{v}{u} u'\right). \qquad (13)$$

Примѣръ.—Если положить $v = x$, $u = x$, то функція z обратится въ x^x, и производная будетъ:

$$x^x\left(\frac{\log x}{\log e} + 1\right).$$

§ 124. Приложенія предыдущихъ правилъ. — Предыдущія правила даютъ возможность составить производную отъ данной алгебраической функціи, какъ бы сложна она ни была; приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1) Найти производную отъ функціи: $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Полагаемъ

$$1 + x^2 = u,$$
$$\sqrt{1 + x^2} = u^{\frac{1}{2}}$$

и находимъ (§§ **117** и **122**):

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

2) Найти производную отъ функціи: $y = \frac{x^n}{(1 + x)^n}$.

Мы можемъ разсматривать это выраженіе, какъ дробь, и воспользоваться правиломъ **§ 121**-го:

$$y' = \frac{n x^{n-1}(1 + x)^n - n x^n (1 + x)^{n-1}}{(1 + x)^{2n}} = \frac{n x^{n-1}}{(1 + x)^{n+1}}.$$

Данную дробь можно было бы разсматривать еще какъ n-ую степень $\frac{x}{1 + x}$ и воспользоваться правиломъ **§ 122**-го:

$$y' = n\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)' = n\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1} \frac{x+1-x}{(1+x)^2} =$$
$$= n\,\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}},$$

что вполнѣ совпадаетъ съ предыдущимъ результатомъ.

3) Найти производную отъ функціи: $y = \log\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1}$.

Полагаемъ

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1} = U;$$

тогда изъ равенства:

$$y = \log U$$

по § 118-му получаемъ:

$$y' = \frac{\log e}{U} \cdot U'.$$

Чтобы отыскать U', нужно приложить правила, данныя въ §§ 121-омъ и 122-омъ; по нимъ мы находимъ:

$$U' = \frac{(\sqrt{x^2-1}+1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - (\sqrt{x^2-1}-1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1}+1)^2} =$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}\,(\sqrt{x^2-1}+1)^2}$$

и, слѣдовательно,

$$y' = \frac{2x\log e}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-2)}.$$

4) Пусть, наконецъ, $y = e^x \mathrm{L}x$, при чемъ логариѳмъ взятъ въ системѣ Непера. Найдемъ:

$$y' = e^x\left(\frac{1}{x} + \mathrm{L}x\right).$$

IV. Производныя отъ круговыхъ функцій.

§ 125. Производная отъ $\sin x$.—Производная отъ функціи $\sin x$, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}.$$

Изъ тригонометріи же извѣстно, что

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right);$$

слѣдовательно,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

А такъ какъ при весьма маломъ h отношеніе синуса къ соотвѣтственной дугѣ стремится къ единицѣ и кромѣ того $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ безконечно приближается къ $\cos x$, то предыдущее выраженіе будетъ имѣть предѣломъ $\cos x$.

Итакъ, *производная отъ* $\sin x$ есть $\cos x$, т.-е.

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (14)$$

§ 126. Производная отъ $\cos x$.—Изъ равенства:

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

вытекаетъ, что $\cos x$ можно разсматривать, какъ функцію отъ функціи. Примѣняя правило **§ 117**-го, находимъ:

$$(\cos x)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$$

Итакъ, *производная отъ* $\cos x$ *есть* $-\sin x$, т.-е.

$$(\cos x)'=-\sin x. \qquad (15)$$

§ 127. Производная отъ $\tan gx$.—Прилагая къ равенству:

$$\tan gx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

правило § 121-го, находимъ:

$$(\tan gx)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (16)$$

Итакъ, *производная отъ* $\tan gx$ *есть* $\frac{1}{\cos^2 x}$.

§ 128. Производная отъ $\mathrm{cotang}x$.—Прилагая къ равенству:

$$\mathrm{cotang}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

правило § 121-го, находимъ:

$$(\mathrm{cotang}x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (17)$$

Итакъ, *производная отъ* $\mathrm{cotang}x$ *есть* $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

§ 129. Производная отъ $\sec x$.—Такъ какъ

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

то

$$(\sec x)' = (\cos^{-1} x)' = -\cos^{-2} x.(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \qquad (18)$$

Итакъ, *производная отъ* $\sec x$ *есть* $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

§ 130. Производная отъ $\mathrm{cosec}x$.—Такъ какъ

$$\mathrm{cosec}x = \frac{1}{\sin x},$$

то

$$(\mathrm{cosec}x)' = (\sin^{-1} x)' = -\sin^{-2} x \cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}. \qquad (19)$$

Итакъ, *производная отъ* $\mathrm{cosec}x$ *есть* $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

§ 131. Замѣчаніе.—Мы принимаемъ, въ предыдущихъ параграфахъ, что дуга x измѣряется ея отношеніемъ къ радіусу круга, часть котораго она составляетъ. Въ самомъ дѣлѣ, только при та-

комъ предположеніи можно было сказать, что отношеніе синуса къ дугѣ стремится къ единицѣ, когда дуга безпредѣльно убываетъ (§ 125).

§ 132. Опредѣленіе обратныхъ функцій. — Всякій разъ, когда двѣ перемѣнныя, x и y, связаны такимъ образомъ, что по данному значенію одной изъ нихъ опредѣляется значеніе другой, онѣ называются функціями одна отъ другой; двѣ такія функціи называются *обратными*. Такъ, напр., если $y=a^x$, то $x=\log_a y$; здѣсь, каждому значенію x соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе показательной функціи y и каждому значенію y соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе логариѳмической функціи x. Обѣ функціи, y и x,— обратны одна относительно другой. Напр., еще: синусъ дуги есть функція этой дуги и, обратно, дуга есть функція синуса; дѣйствительно, каждому значенію синуса соотвѣтствуютъ опредѣленныя значенія дуги. Эта функція обозначается посредствомъ символа:

$$\arcsin x;$$

читать его нужно такъ: дуга, синусъ которой есть x. Опредѣлимъ производныя отъ *обратныхъ круговыхъ функцій:* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tang} x$.

§ 133. Производная отъ $\arcsin x$.—Полагаемъ:

$$y=\arcsin x$$

и ищемъ производную отъ y по x. Изъ этого уравненія выводимъ:

$$x=\sin y,$$

беря производныя отъ обѣихъ частей по x, при чемъ ко второй части прилагаемъ правило функцій отъ функцій, находимъ:

$$1=\cos y\times y',$$

гдѣ y' обозначаетъ производную отъ y по x. Слѣдовательно,

$$y'=\frac{1}{\cos y}.$$

А такъ какъ $\sin y$ равно x, то $\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$, и потому

$$y'=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}. \qquad (20)$$

Итакъ, *производная отъ* arc sin$x$ *есть* $\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$.

§ 134. Замѣчаніе. — Можетъ показаться страннымъ, что искомая производная имѣетъ неопредѣленный знакъ. Въ этомъ случаѣ нужно замѣтить, что знакъ знаменателя есть знакъ cos$y$ и что одному и тому же sin$x$ соотвѣтствуетъ безчисленное множество дугъ, изъ которыхъ однѣ имѣютъ косинусъ положительный, а другія — отрицательный. Эти различныя дуги имѣютъ разныя производныя, при чемъ, понятно, каждая изъ нихъ имѣетъ только одну производную. Слѣдовательно, чтобы взять производную отъ дуги, синусъ которой есть x, нужно указать тотъ квадрантъ, гдѣ оканчивается разсматриваемая дуга; и если дуга оканчивается въ первомъ или четвертомъ квадрантѣ, то берется $+$, а если во второмъ или третьемъ, то $-$.

§ 135. Производная отъ arc cos$x$.—Полагая

$$y = \text{arc}\cos x,$$

выводимъ, что

$$x = \cos y.$$

Беря производныя отъ обѣихъ частей, получаемъ:

$$1 = -\sin y \times y',$$

откуда

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}. \qquad (21)$$

Итакъ, *производная отъ* arc cos$x$ *есть* $\frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$.

Въ этомъ случаѣ знаменатель есть значеніе sin$y$, т. е. синусъ дуги, отъ которой ищется производная. Слѣдовательно, нужно взять его со знакомъ $+$, если дуга оканчивается въ первомъ или во второмъ квадрантѣ, и со знакомъ $-$, если дуга оканчивается въ третьемъ или четвертомъ квадрантѣ.

§ 136. Изъ предыдущаго видно, что обѣ функціи: arc sin$x$ и arc cos$x$ имѣютъ или равныя производныя, или равныя, но съ противоположными знаками; не трудно замѣтить, что это такъ и должно быть; въ самомъ дѣлѣ, если y обозначаетъ дугу, синусъ которой

есть x, то $\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ и $\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$ будутъ имѣть одинъ и тотъ же косинусъ, равный x. Итакъ,

$$\frac{\pi}{2}-\text{arc}\sin x=\text{arc}\cos x$$

и

$$\text{arc}\sin x-\frac{\pi}{2}=\text{arc}\cos x.$$

Отсюда заключаемъ, что въ зависимости отъ значенія, приписываемаго дугѣ, косинусъ которой есть x, ея производная или будетъ равна производной отъ $\text{arc}\sin x$, или будетъ отличаться отъ послѣдней только знакомъ.

§ 137. Производная отъ $\text{arc}\,\text{tang}x$.—Полагая

$$y=\text{arc}\,\text{tang}x,$$

выводимъ, что

$$x=\text{tang}y.$$

Беремъ теперь производныя отъ обѣихъ частей:

$$1=\frac{y'}{\cos^2 y},$$

откуда

$$y'=\cos^2 y=\frac{1}{1+\text{tang}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}. \tag{22}$$

Итакъ, *производная отъ* $\text{arctang}x$ *есть* $\frac{1}{1+x^2}$.

Мы видимъ, что функція $\text{arc}\,\text{tang}x$ имѣетъ только одну производную, хотя данному тангенсу соотвѣтствуетъ безчисленное множество дугъ. Происходитъ это отъ того, что всѣ такія дуги заключаются въ формулѣ.

$$n\pi+y,$$

гдѣ y обозначаетъ одну изъ нихъ; отсюда понятно, что каждая изъ нихъ будетъ имѣть ту же производную, что и y.

§ 138. Таблица производныхъ. — Такъ какъ необходимо знать основныя формулы исчисленія производныхъ, то мы представимъ ихъ въ видѣ слѣдующей таблицы:

1) $y = ax + b$, $\quad y' = a$.

2) $y = f(x) \pm \varphi(x)$, $\quad y' = f'(x) \pm \varphi'(x)$.

3) $y = f(x) \cdot \varphi(x)$, $\quad y' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \varphi'(x)$.

4) $y = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, $\quad y' = \frac{f(x)\varphi'(x) - \varphi(x) f'(x)}{[f(x)]^2}$.

5) $y = x^m$, $\quad y' = mx^{m-1}$.

6) $y = e^x$, $\quad y' = e^x$.

7) $y = a^x$, $\quad y' = a^x \mathrm{L} a$.

8) $y = \mathrm{L} x$, $\quad y' = \frac{1}{x}$.

9) $y = \log x$, $\quad y' = \frac{1}{x} \log e$.

10) $y = \sin x$, $\quad y' = \cos x$.

11) $y = \cos x$, $\quad y' = -\sin x$.

12) $y = \mathrm{tang}\, x$, $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

13) $y = \mathrm{cotang}\, x$, $\quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

14) $y = \sec x$, $\quad y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

15) $y = \mathrm{cosec}\, x$, $\quad y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

16) $y = \arcsin x$, $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

17) $y = \arccos x$, $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

18) $y = \mathrm{arc\,tang}\, x$, $\quad y' = \frac{1}{1+x^2}$.

19) $y = \mathrm{arc\,cot}\, x$, $\quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

20) $y = \mathrm{arc\,sec}\, x$, $\quad y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

21) $y = \mathrm{arc\,cosec}\, x$, $\quad y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

22) $y = \log \sin x$, $\quad y' = \mathrm{cotang}\, x$.

23) $y = \log \cos x$, $\quad y' = -\mathrm{tang}\, x$.

24) $y = \log \mathrm{tang}\, x$, $\quad y' = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

25) $y = \log \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} x$, $\quad y' = \frac{1}{\sin x}$.

Въ производныхъ отъ $\arcsin x$ и $\mathrm{arc\,cosec}\, x$ радикалъ имѣетъ такой же знакъ, какъ и $\cos y$; въ производныхъ же отъ $\arccos x$ и $\mathrm{arc\,sec}\, x$ радикалъ имѣетъ знакъ $\sin y$.

КОНСПЕКТЪ.

§ 109. Опредѣленія.—§ 110. Разложеніе цѣлой функціи $f(x+h)$ по степенямъ h, опредѣленіе производной отъ цѣлой функціи.—§ 111. Эта производная есть предѣлъ, къ которому стремится отношеніе приращенія функціи къ приращенію перемѣнной, когда это послѣднее стремится къ нулю. —§ 112. Это свойство служитъ опредѣленіемъ производной отъ какой-угодно функціи; послѣдовательныя производныя.—§ 113. Производныя отъ a^x, отъ e^x.—§ 114. Производныя отъ $\log x$, отъ Lx.—§ 115. Производная отъ суммы.—§ 116. Опредѣленіе функціи отъ функціи; примѣры.—§ 117. Производная функціи отъ функціи.—§ 118. Примѣры.—§ 119. Распространеніе на болѣе общій случай.—§ 120. Производная отъ произведенія.—§ 121. Производная отъ частнаго.—§ 122. Производная отъ степени; приложеніе къ квадратному корню.—§ 123. Производная отъ u^v, гдѣ u и v—функціи отъ x.—§ 124. Приложенія предыдущихъ правилъ.—§ 125. Производная отъ $\sin x$.—§ 126. Производная отъ $\cos x$.—§ 127. Производная отъ $\operatorname{tang} x$.—§ 128. Производная отъ $\operatorname{cotang} x$.—§ 129. Производная отъ $\sec x$.—§ 130. Производная отъ $\operatorname{cosec} x$.—§ 131. При этихъ вычисленіяхъ дуга x измѣряется ея отношеніемъ къ радіусу круга.—§ 132. Опредѣленіе обратныхъ функцій.—§ 133. Производная отъ $\arcsin x$.—§ 134. Замѣчаніе о двойномъ знакѣ этой производной.—§ 135. Производная отъ $\arccos x$.—§ 136. Двѣ послѣднія производныя должны быть или равными, или отличаться только знаками.—§ 137. Производная отъ $\operatorname{arctang} x$.—§ 138. Таблица формулъ, представляющихъ производныя отъ простѣйшихъ функцій.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Найти производную отъ

$$y=\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Отв.:

$$y'=\frac{x}{2(\sqrt{x-1})^3}.$$

II. Найти производную отъ

$$y=f(a+bx^2).$$

Отв.:

$$y'=2f'(a+bx^2)bx.$$

III. Найти производную отъ

$$y = f\left(\frac{a}{x}\right).$$

Отв.:

$$y' = -\frac{a}{x^2} f'\left(\frac{a}{x}\right).$$

IV. Найти производную отъ

$$y = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{x+a}{b-x}\right).$$

Отв.:

$$y' = -\frac{2}{x^3} f\left(\frac{x+a}{b-x}\right) + \frac{a+b}{x^2(b-x)^2} f'\left(\frac{x+a}{b-x}\right).$$

V. Найти производныя отъ

$$y = x(\mathrm{L}x - 1),\ z = e^x(x-1).$$

Отв.:

$$y' = \mathrm{L}x,\ z' = xe^x.$$

VI. Найти производныя отъ

$$y = x\sin x + \cos x,\ z = \sin x - x\cos x.$$

Отв.:

$$y' = x\cos x,\ z' = x\sin x.$$

VII. Найти производную отъ

$$y = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Отв.:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

VIII. Найти производную отъ

$$y = \arccos\left(\frac{a\cos x + b}{b\cos x + a}\right).$$

Отв.:

$$y' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b\cos x + a}$$

IX. Найти производную отъ

$$y = \frac{1}{2} \mathrm{L} \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right).$$

Отв.:

$$y' = \frac{1}{\sin x}.$$

X. Найти производныя отъ

$$y = \mathrm{L} \arcsin x, \quad z = \mathrm{L} \arccos x, \quad v = \mathrm{L} \operatorname{arctg} x.$$

Отв.:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \arcsin x}, \quad z' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}, \quad v' = \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.$$

XI. Найти производную отъ

$$y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Отв.:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Показать, почему эта производная есть удвоенная производная отъ $\arcsin x$.

XII. Найти производную отъ

$$y = \operatorname{arctang} \frac{a + x}{1 - ax}.$$

Отв.:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Показать, почему эта производная равна производной отъ $\operatorname{arctang} x$.

XIII. Найти производную отъ

$$y = \operatorname{arctang} \frac{a + b + x - abx}{1 - ab - ax - bx}$$

и показать, почему она равна предыдущей.

XIV. Полагая

$$\mathrm{L} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \varphi(x),$$

найти производныя отъ

$$y=\varphi\left(\frac{a+x}{1+ax}\right),\quad z=\varphi\left(\frac{a+b+x+abx}{1+ab+(a+b)x}\right).$$

Отв.:

$$y'=\frac{2}{1-x^2},\quad z'=\frac{2}{1-x^2}.$$

Показать, почему обѣ эти функціи имѣютъ одну и ту же производную.

XV. Найти производную отъ

$$y=\arcsin\frac{\sqrt{1-e^2}\sin x}{1-e\cos x}.$$

Отв.:

$$y'=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos x}.$$

XVI. Найти производную отъ выраженія:

$$y=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x}\right)\right].$$

XVII. Найти производную отъ выраженія:

$$y=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right)\right].$$

XVIII. Найти производную отъ выраженія:

$$y=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)\right].$$

Показать, почему для послѣднихъ трехъ выраженій (XVI, XVII, XVIII) получается одна и та же производная:

$$y'=\frac{\cos x}{a+b\cos x}.$$

XIX. Найти производную отъ выраженія:

$$y=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{L}\left(\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right)\right].$$

Эта функція имѣетъ ту же производную, что и три предыдущихъ выраженія.

XX. Найти производную отъ выраженія:

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \, L \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}.$$

Отв:

$$y' = \frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Изслѣдованіе функцій при помощи производныхъ, обратный переходъ: отъ производныхъ къ первообразнымъ функціямъ.

I. Свойства производныхъ.

§ 139. Опредѣленіе. — Функція $f(x)$ называется *возрастающею*, если при весьма маломъ приращеніи перемѣнной x значеніе ея становится больше; другими словами, если при весьма малыхъ значеніяхъ h

$$f(x+h) - f(x) > 0.$$

Функція называется *убывающею*, если при весьма маломъ приращеніи перемѣнной x значеніе ея становится меньше; другими словами, если при весьма малыхъ значеніяхъ h

$$f(x+h) - f(x) < 0.$$

§ 140. Условіе возрастанія и убыванія функціи.—Такъ какъ производная $f'(x)$ есть предѣлъ отношенія $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h=0$, то отсюда выходитъ, что при h, не равномъ нулю, но весьма маломъ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

гдѣ ε—неизвѣстное количество, зависящее отъ x и отъ h; такъ же, какъ и h, оно—весьма мало и стремится къ нулю одновременно съ h. Переписываемъ послѣднее равенство въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \varepsilon].$$

Если $f'(x)$ не нуль, то h можно выбрать на столько малымъ, что ε, по абсолютной величинѣ, будетъ меньше $f'(x)$; въ такомъ случаѣ знакъ $[f'(x)+\varepsilon]$ будетъ совпадать со знакомъ $f'(x)$, и такъ какъ h—положительно, то знакъ $f'(x)$ будетъ знакомъ всей первой части предыдущаго равенства.

Итакъ, *если производная $f'(x)$ — положительна, то $f(x)$ — функція возрастающая, а если производная—отрицательна, то $f(x)$ — функція убывающая.* Обратныя заключенія, очевидно, справедливы.

§ 141. Общее условіе для maximum'a и minimum'a функціи. — Если перемѣнная, отъ которой зависитъ функція, измѣняется непрерывно, то и функція измѣняется также непрерывно, а въ такомъ случаѣ по предыдущей теоремѣ мы опредѣлимъ всѣ значенія перемѣнной, при которыхъ функція возрастаетъ или убываетъ.

Если для разсматриваемой функціи наступаетъ maximum при нѣкоторомъ значеніи a перемѣнной x, то при x, меньшемъ a, функція возрастаетъ, а при x, большемъ a, убываетъ. Поэтому производная, будучи сначала положительною, а затѣмъ отрицательною, должна, *при переходѣ отъ положительнаго значенія къ отрицательному*, мѣнять знакъ въ тотъ моментъ, когда x, непрерывно возрастая, достигаетъ и проходитъ значеніе a.

Точно также, если для разсматриваемой функціи при $x=a$ наступаетъ minimum, производная, *при переходѣ отъ отрицательнаго значенія къ положительному*, должна мѣнять знакъ въ тотъ моментъ, когда x, непрерывно возрастая, достигаетъ значенія a.

Изъ предыдущаго видно, что значенія перемѣнной x, при которыхъ для функціи наступаетъ maximum или minimum, въ то же время суть тѣ значенія, при которыхъ производная отъ этой функціи мѣняетъ знакъ. А такъ какъ непрерывная функція не можетъ мѣнять знака иначе, какъ только при переходѣ черезъ нуль, представляющій промежуточное значеніе между положительными и отрицательными величинами, то отсюда вытекаетъ, что для функціи, производная отъ которой непрерывна, наступаетъ maximum или minimum только при тѣхъ значеніяхъ x, которыя ея производную обращаютъ въ нуль:

Обратное же заключеніе не всегда справедливо. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы для функціи наступилъ maximum или minimum, не достаточно еще, чтобы ея производная обращалась въ нуль: нужно также, чтобы эта послѣдняя мѣняла знакъ; есть много функцій, которыя при переходѣ черезъ нуль знака не мѣняютъ.

Итакъ, *для нахожденія maximum'овъ и minimum'овъ функціи* $f(x)$, *рѣшаютъ уравненіе:* $f'(x) = 0$ *и отбрасываютъ тѣ рѣшенія, при которыхъ производная не мѣняетъ знака. Изъ рѣшеній же, при которыхъ знакъ у производной измѣняется, maximum'у соотвѣтствуютъ тѣ изъ нихъ, при которыхъ производная переходитъ отъ положительнаго значенія къ отрицательному, а minimum'у—въ противномъ случаѣ.*

Можно еще замѣтить, что если наступаетъ maximum, то производная, будучи сначала положительною, затѣмъ нулемъ и, наконецъ, отрицательною, постоянно убываетъ; слѣдовательно, ея производная, т.-е. вторая производная $f''(x)$, должна быть отрицательною. Наоборотъ, если наступаетъ minimum, то производная, будучи сначала отрицательною, затѣмъ нулемъ и, наконецъ, положительною, все время возрастаетъ; слѣдовательно, вторая производная $f''(x)$ должна быть положительною. Обратныя заключенія — очевидны.

Итакъ, *чтобы значеніе* $x = a$, *обращающее* $f'(x)$ *въ нуль, соотвѣтствовало maximum'у или minimum'у, достаточно, чтобы при этомъ значеніи* $f''(x)$ *соотвѣтственно была бы отрицательною или положительною.*

II. Изслѣдованіе нѣкоторыхъ функцій

§ 142. Изслѣдованіе функціи x^x, когда x измѣняется отъ 0 до ∞.— Начнемъ съ разысканія значенія этой функціи при $x = 0$. Если перемѣнной придать непосредственно это значеніе, то функція приметъ неопредѣленный видъ 0^0, не имѣющій никакого смысла; дѣйствительно, съ одной стороны, всѣ степени 0 суть также нули, а съ другой стороны, нулевая степень всякаго количества равна 1. Чтобы опредѣлить истинное значеніе x^x, т.-е. то *значеніе, къ которому стремится* x^x, *когда* x *безпредѣльно убываетъ*, положимъ

$$y = x^x$$

и возьмемъ логариѳмы отъ обѣихъ частей:

$$\log y = x \log x.$$

Такъ какъ x безпредѣльно уменьшается, то положимъ его равнымъ $\frac{1}{z}$, гдѣ z безпредѣльно увеличивается:

$$\log y = \frac{1}{z} \log \frac{1}{z} = - \frac{1}{z} \log z.$$

Очевидно же, что очень большое число гораздо больше своего логариөма (такъ, напр., если логариөмы взяты въ системѣ съ основаніемъ 10, то цѣлая часть логариөма числа, состоящаго изъ 1000 цифръ, равна только 999); слѣдовательно, $\frac{1}{z}\log z$ стремится къ 0 и $\log y$ уменьшается безпредѣльно. Отсюда заключаемъ, что y стремится къ единицѣ.

Чтобы разсмотрѣть измѣненія x^x, начиная со значенія 1, возьмемъ производную отъ этой функціи. По § 123-му получимъ:

$$x^x(1+Lx),$$

при чемъ логариөмъ взятъ въ неперовой системѣ. Если x—очень мало, то эта производная—отрицательна; слѣдовательно, x^x сначала уменьшается и это уменьшеніе продолжается до тѣхъ поръ, пока

$$1+Lx<0, \text{ или } Lx<-1,$$

т.-е. пока

$$x<\frac{1}{e}.$$

При $x=\frac{1}{e}$ производная обращается въ нуль и для функціи наступаетъ minimum; при дальнѣйшемъ возрастаніи x, начиная со значенія $\frac{1}{e}$, производная постоянно положительна и x^x растетъ безпредѣльно.

§ 143. Изслѣдованіе функціи $y=\frac{Lx}{x}$ **(логариөмъ здѣсь взятъ въ неперовой системѣ).** — При $x=0$, очевидно, $y=-\infty$. Производная равна:

$$y'=\frac{1-Lx}{x^2}.$$

Эта производная—положительна, пока x меньше e; слѣдовательно, функція все увеличивается при измѣненіи x отъ 0 до e; она проходитъ при этомъ значенія отъ $-\infty$ до $\frac{1}{e}$. Послѣднее значеніе $\frac{1}{e}$ есть ея maximum; далѣе, производная становится отрицательною и функція безпредѣльно убываетъ; не трудно видѣть, что она стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи x.

§ 144. Задача.—*Дана сумма* $x+y$, *найти maximum или minimum для* x^m+y^m. Замѣтимъ сначала, что когда сумма $x+y$ дана, y является функціею отъ x, а слѣдовательно, и x^m+y^m будетъ также функціею отъ x; поэтому, можно приложить сюда доказанную выше теорему (§ 141). Полагаемъ:

$$x+y=2a,\ x^m+y^m=u.$$

Нужно составить производную отъ u и приравнять ее нулю; но, очевидно,

$$u'=mx^{m-1}+my^{m-1}y',$$

а изъ уравненія:

$$x+y=2a$$

выводимъ, что

$$1+y'=0, \text{ откуда } y'=-1;$$

слѣдовательно,

$$u'=mx^{m-1}-my^{m-1}.$$

Поэтому, условіе:

$$u'=0$$

приводится къ равенству:

$$x^{m-1}=y^{m-1},$$

т.-е. чтобы $x=y$, иначе говоря, чтобы $x=a$.

Чтобы рѣшить, будетъ ли въ этомъ случаѣ maximum или minimum, нужно изслѣдовать, переходитъ ли соотвѣтственно производная, мѣняя свой знакъ, отъ положительнаго значенія къ отрицательному, или наоборотъ (§ 141), въ то время какъ x, возрастая, проходитъ черезъ значеніе a. Но, предполагая m больше 1, мы тотчасъ замѣчаемъ, что при x, меньшемъ a, $(mx^{m-1}-my^{m-1})$ — отрицательно, а при x, бо̀льшемъ a,—положительно. Слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ minimum. Заключеніе станетъ обратнымъ, если $(m-1)$ -отрицательно.

§ 145. Задача.—*Разыскать maxima и minima для выраженія*:

$$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}.$$

Сначала составляемъ производную y' отъ y (§ 121):

$$y' = \frac{(2x-5)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-5x+6)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{6x^2-10x-11}{(x^2+x+1)^2}.$$

Такъ какъ знаменатель въ y' положителенъ, то знакъ этой производной будетъ совпадать со знакомъ $(6x^2-10x-11)$. Этотъ же трехчленъ—отрицателенъ, когда x проходитъ значенія между корнями уравненія:

$$6x^2-10x-11=0,$$

и положителенъ въ противномъ случаѣ. Корни этого уравненія будутъ:

$$x=\frac{5\mp\sqrt{91}}{6},$$

т.-е.

$$x_1=-0{,}75656\ 53357,\ x_2=2{,}42323\ 20024;$$

соотвѣтственныя значенія y суть:

$$y=\frac{19\pm2\sqrt{91}}{3},$$

т.-е.

$$y_1=12{,}69292\ 80094,\ y_2=0{,}02626\ 13428.$$

Отсюда видно, что функція y, не обращающаяся въ безконечность, такъ какъ (x^2+x+1) не можетъ стать нулемъ, и, слѣдовательно, непрерывная, возрастаетъ, когда x измѣняется отъ $-\infty$ до x_1; далѣе, она уменьшается, когда x измѣняется отъ x_1 до x_2; и, наконецъ неопредѣленно увеличивается, когда x возрастаетъ, начиная со значенія x_2. Она достигаетъ своего maximum'a при $x=x_1$ и minimum'a при $x=x_2$.

Кромѣ того видно, что при очень большихъ значеніяхъ x функція весьма мало отличается отъ единицы; дѣйствительно, если замѣнить при такихъ значеніяхъ числитель и знаменатель ихъ первыми членами, равными между собою, то ошибка въ обоихъ членахъ дроби и, слѣдовательно, въ частномъ, очевидно, будетъ весьма малою.

Припоминая все сказанное, мы можемъ написать слѣдующую таблицу измѣненій заданной функціи.

$x = -\infty$,	$y = 1$,
$x = x_1 = -0{,}75656\ \ldots$,	$y = 12{,}69292\ \ldots$ maximum,
$x = 0$,	$y = 6$,
$x = 2$,	$y = 0$,
$x = 2{,}42323\ \ldots$,	$y = -0{,}02626\ \ldots$ minimum,
$x = 3$,	$y = 0$,
$x = \infty$,	$y = 1$.

§ 146. Случай, когда функція—разрывна.—Разсмотрѣнныя въ предыдущихъ параграфахъ функціи — непрерывны и доказанныя теоремы (**§§ 140 и 141**) прилагаются къ нимъ безъ затрудненій. Но не всегда бываетъ такъ: иногда при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнной функція измѣняется скачками и тогда эти значенія нужно испытывать отдѣльно; разсмотрѣнія производной уже будетъ недостаточно для изслѣдованія измѣненій функціи.

Пусть, напр., дана функція:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 7}{x^2 - 8x + 15}.$$

Непосредственно видно, что эта функція—разрывна при значеніяхъ $x = 3$ и $x = 5$, обращающихъ знаменатель въ нуль; поэтому, теоремами, относящимися къ теоріи производныхъ, можно воспользоваться при значеніяхъ x только въ тѣхъ предѣлахъ, которые не содержатъ ни 3, ни 5. Беремъ производную отъ y:

$$y' = \frac{-6x^2 + 16x + 26}{(x^2 - 8x + 15)^2}.$$

Рѣшая уравненіе:

$$-6x^2 + 16x + 26 = 0,$$

находимъ:

$$x = \frac{4 \mp \sqrt{55}}{3},$$

т.-е.

$$x_1 = -1{,}13873\ 28290,\quad x_2 = 3{,}80539\ 94957;$$

соотвѣтственныя значенія y суть:

$$y = -7 \pm \sqrt{55},$$

т.-е.

$$y_1 = 0{,}41619\ 84871,\ y_2 = -14{,}41619\ 84871.$$

Слѣдовательно, y'—отрицательно, до тѣхъ поръ пока x заключается между $-\infty$ и x_1; оно—положительно при всѣхъ значеніяхъ x между x_1 и x_2 и снова дѣлается отрицательнымъ при x, большемъ x_2. Поэтому, мы должны были бы сказать (**§ 140**), что y уменьшается, когда x измѣняется въ первомъ промежуткѣ, что y увеличивается во второмъ промежуткѣ и опять уменьшается въ третьемъ, но, по приведеннымъ выше соображеніямъ, эти заключенія — не точны, такъ какъ y—разрывно. Въ самомъ дѣлѣ, y уменьшается при измѣненіи x отъ $-\infty$ до x_1, потому что въ этомъ промежуткѣ функція—непрерывна, а ея производная—отрицательна; далѣе, когда x измѣняется отъ x_1 до 3, y увеличивается и обращается въ ∞ при $x=3$, затѣмъ оно сразу переходитъ въ $-\infty$ и увеличивается снова при возрастаніи x до x_2; при послѣднемъ значеніи для y наступаетъ maximum. Начиная со значенія x_2 до $x=5$ функція y уменьшается; при послѣднемъ значеніи y обращается въ $-\infty$, затѣмъ сразу переходитъ въ $+\infty$ и далѣе снова уменьшается, безъ всякаго разрыва, по мѣрѣ того какъ x растетъ безпредѣльно.

Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, можно еще прибавить, что при очень большихъ значеніяхъ x, положительныхъ или отрицательныхъ, y весьма мало отличается отъ единицы.

Предыдущія заключенія мы можемъ представить въ таблицѣ, по которой не трудно судить о всемъ ходѣ измѣненій функціи, идущей въ каждомъ промежуткѣ постоянно въ одномъ и томъ же направленіи Вотъ самая таблица:

$x = -\infty$,	$y = 1$,
$x = x_1 = -1{,}13873\ldots$,	$y = 0{,}41619\ldots$ minimum,
$x = 0$,	$y = 0{,}46666\ldots$,
$x = 3$,	$y = \pm\infty$,
$x = x_2 = 3{,}80539\ldots$,	$y = -14{,}41619\ldots$ maximum,
$x = 5$,	$y = \mp\infty$,
$x = \infty$,	$y = 1$.

III. Приложенія производныхъ къ опредѣленію значеній функцій, принимающихъ неопредѣленный видъ.

§ 147. Случай, когда функція принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. — Пусть будетъ дана функція:

$$y = \frac{f(x)}{F(x)}$$

и предположимъ, что при $x = a$ одновременно и $f(a) = 0$, и $F(a) = 0$; y принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. Нашу задачу можно выразить такъ: опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится y, когда x стремится къ a. Этотъ предѣлъ обыкновенно называютъ *истиннымъ значеніемъ* для y.

Такъ какъ $f(a) = 0$, $F(a) = 0$, то у насъ будетъ тождество:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{F(x)-F(a)}{x-a}}.$$

Предыдущій и послѣдующій члены послѣдняго отношенія стремятся, по самому опредѣленію, къ производнымъ: $f'(a)$ и $F'(a)$, когда x стремится къ a. Поэтому, переходя къ предѣлу, при $x = a$, мы получимъ:

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}, \text{ или } \lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Итакъ, если $f'(x)$ и $F'(x)$ не нули и не безконечности, то при $x = a$ *истинное значеніе для y есть значеніе отношенія производныхъ обоихъ членовъ данной дроби.*

§ 148. Примѣръ. — Найти истинное значеніе $\frac{x^m - a^m}{x-a}$ при $x = a$. Отношеніе производныхъ есть $\frac{mx^{m-1}}{1}$ и искомый предѣлъ равенъ ma^{m-1}.

§ 149. Случай, когда функція принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$. — Предположимъ, что при $x = a$ функція $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, т.-е. что какъ $f(a) = \infty$, такъ и $F(a) = \infty$. Пишемъ тождество:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{F(x)} : \frac{1}{f(x)}.$$

А такъ какъ при $x=a$ одновременно и $\frac{1}{F(x)}$, и $\frac{1}{f(x)}$ обращаются въ нуль, то истинное значеніе второй части послѣдняго равенства будетъ предѣлъ отношенія производныхъ отъ $\frac{1}{F(x)}$ и $\frac{1}{f(x)}$ (§ 147). Это отношеніе равно,

$$\frac{-F'(x)}{F(x)^2} : \frac{-f'(x)}{f(x)^2}, \text{ или } \left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2 : \frac{f'(x)}{F'(x)};$$

слѣдовательно, если предѣлъ для y не нуль и не безконечность, то для его опредѣленія у насъ составится равенство:

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2 : \lim\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Обозначая искомый предѣлъ черезъ L, мы это равенство перепишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$L=L^2:\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}, \text{ откуда } L=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

какъ и въ первомъ случаѣ (§ 147).

Если предѣлъ для y есть 0, то предыдущее разсужденіе не приложимо, но въ такомъ случаѣ мы замѣчаемъ, что если обозначить черезъ k нѣкоторую постоянную, то выраженіе:

$$\frac{f(x)}{F(x)}+k, \text{ или, что одно и то же, } \frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}$$

приметъ также видъ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x=a$, а истинное его значеніе будетъ k, потому что, по предположенію, $\lim\frac{f(x)}{F(x)}=0$. Теперь мы можемъ приложить предыдущее правило; получимъ.

$$k=\frac{f'(a)+kF'(a)}{F'(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}+k,$$

откуда

$$\frac{f'(a)}{F'(a)}=0, \text{ или } \lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=0=\lim\frac{f(x)}{F(x)}.$$

Слѣдовательно, предѣлъ для y и тогда, когда онъ равенъ нулю, остается равнымъ предѣлу отношенія производныхъ.

То же самое относится и къ случаю, когда предѣлъ для y есть безконечность. Дѣйствительно, если $\frac{f(a)}{F(a)}=\infty$ то, $\frac{F(a)}{f(a)}=0$; поэтому, на основаніи предыдущаго, $\frac{F'(a)}{f'(a)}=0$ и, слѣдовательно, $\frac{f'(a)}{F'(a)}=\infty$.

§ 150. Случай, когда функція принимаетъ видъ $0\times\infty$.—Дано произведеніе: $y=f(x)\times F(x)$ и дано, что, при $x=a$, $f(a)=0$ и $F(a)=\infty$. Пишемъ:

$$y=\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} \text{ или } y=\frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

и прилагаемъ предыдущія правила, потому что y, представленное въ первомъ видѣ, обращается въ $\frac{0}{0}$, а представленное во второмъ, въ $\frac{\infty}{\infty}$.

§ 151. Случай, когда функція принимаетъ видъ 0^0.—Пусть будетъ дана функція:

$$y=F(x)^{f(x)}$$

и предположимъ, что и $F(a)=0$, и $f(a)=0$. Беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства; получаемъ:

$$\log y=f(x)\times\log F(x).$$

По правилу **§ 150**-го предѣлъ произведенія: $f(x)\times\log F(x)$ найти можно, а слѣдовательно, можно найти предѣлъ и для y.

§ 152. Случай, когда $a=\infty$.—При выводѣ предыдущихъ правилъ предполагалось, что a — конечно, но можно непосредственно показать, что эти правила—справедливы и тогда, когда неопредѣленный видъ для функціи получается при $x=\infty$. Пусть, напр., дана функція $y=\frac{f(x)}{F(x)}$, принимающая видъ $\frac{0}{0}$ при $x=\infty$. Полагаемъ $x=\frac{1}{z}$, т.-е.

$$y=\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)},$$

гдѣ при $x=\infty$, $z=0$; слѣдовательно, можно приложить правило **§ 147**-го, т.-е. написать:

$$\lim y = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

что и требовалось доказать. Только прежде приложенія этихъ правилъ нужно удостовѣриться, что $\frac{f(x)}{F(x)}$ и $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ стремятся, дѣйствительно, къ опредѣленному предѣлу, когда x стремится къ ∞. Напр.,

$$\frac{x + \cos x}{x - \sin x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$$

стремится, очевидно, къ 1 при x, стремящемся къ ∞, между тѣмъ какъ отношеніе производныхъ $\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$ имѣетъ совершенно неопредѣленный предѣлъ.

§ 153. Замѣчаніе.—При приложеніи предыдущихъ правилъ можетъ случиться, что всѣ послѣдовательныя производныя будутъ давать все тотъ же неопредѣленный видъ, какой принимаетъ и сама функція и который намъ и нужно раскрыть. Въ такихъ случаяхъ необходимы особые пріемы (см. I ч., **§ 260** и слѣд.); чаще всего замѣняютъ x на $a + h$, дѣлаютъ упрощенія и полагаютъ $h = 0$.

Пусть, напр., дано $y = \frac{\sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[4]{x^2-a^2}}$; это выраженіе обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x = a$, а всѣ послѣдовательныя производныя отъ числителя и знаменателя обращаются въ безконечность. Полагаемъ $x = a + h$:

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{2ah + h^2}}, \text{ или } \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2a + h)^{\frac{1}{4}}}, \text{ или } \frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2a + h)^{\frac{1}{4}}}.$$

Теперь мы видимъ, что предѣлъ для даннаго выраженія есть нуль при h, стремящемся къ нулю.

IV. Переходъ (обратный) отъ производной функціи къ первообразной.

§ 154. Теорема.—*Двѣ функціи, имѣющія равныя производныя, могутъ отличаться одна отъ другой только на постоянную величину.*

Если двѣ функціи имѣютъ равныя производныя, то производная

отъ ихъ разности, очевидно, равна 0. Поэтому достаточно, для доказательства теоремы, вывести, что *функція, производная отъ которой равна нулю, непремѣнно постоянная величина.*

Пусть $F(x)$ есть функція, производная отъ которой равна нулю. Разсмотримъ слѣдующія дроби:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\varepsilon_1, \\ \dfrac{F(x+2h)-F(x+h)}{h}=\varepsilon_2, \\ \dfrac{F(x+3h)-F(x+2h)}{h}=\varepsilon_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{F(x+nh)-F[x+(n-1)h]}{h}=\varepsilon_n. \end{cases}$$

Предположимъ, что когда h стремится къ нулю, n увеличивается такимъ образомъ, что произведеніе nh всегда сохраняетъ одно и то же значеніе k. Всѣ вторыя части будутъ стремиться къ нулю; въ самомъ дѣлѣ, по предположенію, отношеніе приращенія данной функціи къ безконечно малому приращенію перемѣнной въ предѣлѣ всегда равно нулю. Освобождаясь отъ знаменателей въ уравненіяхъ (1) и затѣмъ складывая ихъ почленно, получаемъ:

$$F(x+nh)-F(x)=F(x+k)-F(x)=h(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n);$$

называя же черезъ η наибольшее изъ чиселъ: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ по абсолютной величинѣ, мы можемъ написать:

$$F(x+k)-F(x)<n\eta h<\eta k.$$

А такъ какъ всѣ количества: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ стремятся къ нулю, то и наибольшее изъ нихъ η можетъ стать сколь-угодно малымъ; слѣдовательно, разность: $F(x+k)-F(x)$, оставаясь *постоянною*, непремѣнно должна равняться нулю. Итакъ, два произвольныхъ значенія $F(x)$ равны между собою, а это значитъ, что функція есть постоянная величина.

§ 155. Переходъ (обратный) отъ производной функціи къ первообразной въ простѣйшихъ случаяхъ.—Разысканіе функціи, производная отъ которой дана, представляетъ одну изъ труднѣйшихъ задачъ въ анализѣ; рѣшеніе ея въ общемъ видѣ—неизвѣстно. Изъ предыдущей

теоремы вытекаетъ только то, что если какая-нибудь одна изъ функцій, имѣющихъ одну и ту же производную, найдена, то всѣ остальныя получаются изъ найденной черезъ прибавленіе къ послѣдней произвольныхъ и, притомъ, постоянныхъ величинъ.

Здѣсь мы примѣнимъ эту задачу только къ простѣйшимъ функціямъ, когда рѣшеніе усматривается, такъ сказать, непосредственно:

1) Найти функцію, производная отъ которой равна Ax^m.

Отв.: $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$.

2) Найти функцію, производная отъ которой равна $\cos mx$.

Отв.: $\frac{\sin mx}{m}$.

3) Найти функцію, производная отъ которой равна $\sin mx$.

Отв.: $-\frac{\cos mx}{m}$.

4) Найти функцію, производная отъ которой равна a^x.

Отв.: $\frac{a^x \log e}{\log a}$.

5) Найти функцію, производная отъ которой равна $\operatorname{tang} x$.

Пишемъ: $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$, откуда заключаемъ, что искомая функція есть $-\log\cos x$.

6) Найти функцію, производная отъ которой равна $\frac{2-x^3}{1-x}$.

Выполняя дѣленіе, получаемъ:

$$\frac{2-x^3}{1-x} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{1-x},$$

слѣдовательно, искомая функція есть

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - L(1-x).$$

7) Найти функцію, производная отъ которой равна $\frac{1}{\sin x}$.

Пишемъ: $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}x} = \frac{\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}$;

слѣдовательно, искомая функція есть $L\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$.

8) Найти функцію, производная отъ которой равна $\frac{1}{a^2+x^2}$.

Пишемъ:
$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}};$$

слѣдовательно, искомая функція есть $\frac{1}{a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a}$.

9) Найти функцію, производная отъ которой равна $\frac{\mathrm{L}x}{x}$.

Пишемъ:
$$\frac{\mathrm{L}x}{x} = \frac{1}{x}\,\mathrm{L}x;$$

слѣдовательно, искомая функція есть $\frac{1}{2}(\mathrm{L}x)^2$.

10) Найти функцію, производная отъ которой равна $\frac{1}{x\mathrm{L}x}$.

Пишемъ:
$$\frac{1}{x\mathrm{L}x} = \frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{L}x};$$

слѣдовательно, искомая функція есть $\mathrm{LL}x$.

Мы ограничимся этими примѣрами, такъ какъ не можемъ указать здѣсь ни одного изъ тѣхъ пріемовъ, какіе употребляются въ болѣе трудныхъ случаяхъ.

КОНСПЕКТЪ.

§ 139. Опредѣленіе возрастающихъ и убывающихъ функцій. —**§ 140.** Условие возрастанія и убыванія функціи. —**§ 141.** *Общее условіе для maximum'а и minimum'а функціи.* —**§ 142.** Изслѣдованіе функціи x^x. —**§ 143.** Изслѣдованіе $\frac{\mathrm{L}x}{x}$. —**§ 144.** Maximum или minimum для x^m+y^m, когда $x+y=a$. —**§ 145.** Maximum и minimum для дроби второй степени. —**§ 146.** Изслѣдованіе разрывной функціи. —**§ 147.** Разысканіе истиннаго значенія функціи, принимающей видъ $\frac{0}{0}$. —**§ 148.** Примѣръ. —**§ 149.** Случай, когда функція принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$. —**§ 150.** Случай, когда функція принимаетъ видъ $0\times\infty$. —**§ 151.** Случай, когда функція принимаетъ видъ 0^0. —**§ 152.** Случай, когда $a=\infty$. —**§ 153.** Замѣчаніе. —**§ 154.** Двѣ функціи, имѣющія одну и ту же производную, могутъ отличаться одна отъ другой только на постоянную величину. —**§ 155.** Переходъ (обратный) отъ производной функціи къ первообразной въ простѣйшихъ случаяхъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Найти основанія системъ, въ которыхъ число можетъ быть равно своему логариѳму, употребляя одинъ изъ слѣдующихъ пріемовъ:

1) Разсмотрѣть функцію $x - \log x$ и найти условіе, при которомъ она могла бы стать равною нулю.

2) Разсмотрѣть функцію $\frac{x}{\log x}$ и найти условіе, при которомъ она могла бы стать равною единицѣ.

3) Разсмотрѣть функцію $a^x - x$ и найти условіе, при которомъ она могла бы стать равною нулю.

4) Разсмотрѣть функцію $\frac{a^x}{x}$ и найти условіе, при которомъ она могла бы стать равною единицѣ.

Конечно, при всѣхъ четырехъ пріемахъ долженъ получиться одинъ и тотъ же результатъ, именно, что

$$a < \frac{1}{e^e}.$$

II. Изслѣдовать, можетъ ли имѣть уравненіе:

$$x^m = m^x$$

другое рѣшеніе, кромѣ $x = m$

Это уравненіе легко представить подъ видомъ:

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log m}{m};$$

слѣдовательно, чтобы отвѣтить на вопросъ, стоитъ только разсмотрѣть функцію $\frac{\log x}{x}$ и выяснить, можетъ ли эта функція обратиться два раза въ одно и то же число при различныхъ значеніяхъ m и x перемѣнной.

III. Источникъ свѣта (свѣтящаяся точка), помѣщенный на вертикальной прямой, освѣщаетъ небольшую часть горизонтальной плоскости радіуса d отъ основанія вертикальной прямой. Изслѣдовать измѣненія количества свѣта, падающаго на освѣщаемую поверхность, при измѣненіи высоты x свѣтящейся точки.

Maximum наступитъ при $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

IV. Правильная усѣченная пирамида съ восьмиугольными основаніями описана около шара радіуса r. Изслѣдовать измѣненіе объема при измѣненіи наклоненія боковыхъ граней къ основаніямъ.

Minimum наступитъ, когда пирамида обратится въ призму.

V. Прямая линія данной длины $2a$ согнута въ дугу круга перемѣннаго радіуса. Изслѣдовать измѣненіе площади сегмента, образуемаго этою дугою и ея хордою.

Maximum наступитъ, когда дуга будетъ полуокружностью.

VI. Найти истинное значеніе $(1-x)\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}$ при $x=1$. Отв.: $\frac{2}{\pi}$.

VII. Найти истинное значеніе $x^n e^{-x}$ при $x=\infty$. Отв.: 0.

VIII. Найти истинное значеніе $x^{\frac{1}{x}}$ при $x=\infty$. Отв.: 1.

IX. Найти истинное значеніе $xe^{\frac{1}{x}}$ при $x=0$. Отв.: ∞.

X. Если обозначить черезъ U_m функцію, производная отъ которой равна $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}$, то

$$mU_m = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)U_{m-2}.$$

И такъ какъ, сверхъ того, очевидно:

$$U_0 = \arcsin x,\quad U_1 = -\sqrt{1-x^2},$$

то изъ предыдущей формулы можно вывести общій способъ составленія U_m, каково бы ни было значеніе m, четное или нечетное.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Ряды для вычисленія логариѳмовъ и числа π.

I. Ряды для вычисленія логариѳмовъ.

§ 156. Разложеніе въ рядъ — L(1 — u). — Пусть x обозначаетъ перемѣнную, измѣняющуюся отъ $x=0$ до $x=u$, при чемъ u есть постоянная, положительная и меньшая 1. Полагаемъ:

$$f(x) = -\mathrm{L}(1-x); \qquad (1)$$

здѣсь L обозначаетъ, какъ и въ предыдущей главѣ, неперовъ логариѳмъ. Производная отъ $f(x)$ равна $\frac{1}{1-x}$ и мы можемъ, очевидно, написать:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}; \qquad (2)$$

въ справедливости послѣдняго равенства не трудно удостовѣриться, или выполнивъ дѣленіе, или составивъ сумму цѣлыхъ членовъ во второй части по формулѣ для прогрессій.

Положимъ еще:

$$\varphi(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}\,; \tag{3}$$

производная отъ $\varphi(x)$, которую мы, какъ обыкновенно, обозначимъ черезъ $\varphi'(x)$, будетъ совпадать съ первою частью выраженія $f'(x)$, т.-е.

$$\varphi'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}. \tag{4}$$

Вычитая уравненіе (4) по-членно изъ уравненія (2), получимъ:

$$f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Вторая часть этого уравненія — положительна и меньше $\frac{x^n}{1-u}$, пока x не равно u; слѣдовательно,

$$f'(x) - \varphi'(x) > 0,$$
$$f'(x) - \varphi'(x) - \frac{x^n}{1-u} < 0.$$

Эти неравенства показываютъ (§ 140), что при возрастаніи x отъ 0 до u функція $f(x) - \varphi(x)$ возрастаетъ, а функція $f(x) - \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$ убываетъ. Въ самомъ дѣлѣ, обѣ эти функціи — непрерывны; и первая изъ нихъ имѣетъ производную постоянно положительную, а вторая — постоянно отрицательную. Кромѣ того, обѣ разсматриваемыя функціи обращаются въ нуль при $x = 0$ и, слѣдовательно, при $x = u$ первая изъ нихъ положительна, а вторая — отрицательна. Итакъ,

$$f(u) - \varphi(u) > 0,$$
$$f(u) - \varphi(u) - \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)} < 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $f(u)$ содержится между $\varphi(u)$ и $\varphi(u) + \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, т.-е. что $f(u)$ равна $\varphi(u)$, увеличенной на нѣкоторое количество,

меньшее $\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$. Это количество, очевидно, можетъ быть представлено черезъ $\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, гдѣ θ обозначаетъ нѣкоторое положительное число, меньшее единицы. Такимъ образомъ мы можемъ написать:

$$f(u)=\varphi(u)+\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)},$$

или

$$-\mathrm{L}(1-u)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^n}{n}+\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}.$$

Такъ какъ u, по предположенію, меньше единицы, то $\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$ стремится къ нулю по мѣрѣ увеличенія n; поэтому,

$$-\mathrm{L}(1-u)=u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}+\ldots \qquad (a)$$

Приведенное доказательство вмѣстѣ съ тѣмъ показываетъ, что вторая часть послѣдняго равенства есть сходящійся рядъ, когда u меньше единицы. Также можно было бы вывести и другія правила, доказанныя въ Кн. I, гл. I.

§ 157. Разложеніе $\mathrm{L}(1+u)$.—Пусть x обозначаетъ перемѣнную, измѣняющуюся въ предѣлахъ отъ 0 до u, при чемъ u есть величина постоянная, положительная и меньшая 1. Полагаемъ:

$$f(x)=\mathrm{L}(1+x); \qquad (1)$$

производная отъ $f(x)$ есть $\frac{1}{1+x}$ и мы можемъ, очевидно, написать:

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=1-x+x^2-x^3+\ldots\mp x^{n-1}\pm\frac{x^n}{1+x},\\ f'(x)&=\quad -x+x^2-x^3+\ldots\pm x^{n-1}\mp x^n\pm\frac{x^{n+1}}{1+x}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Положимъ еще:

$$\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^n}{n} \qquad (3)$$

и обозначимъ, какъ обыкновенно, черезъ $\varphi'(x)$ производную отъ $\varphi(x)$; тогда

$$\varphi'(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots\pm x^{n-1}. \qquad (4)$$

Вычитая уравненіе (4) по-членно изъ каждаго уравненія группы (2), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} f'(x)-\varphi'(x) &= -\frac{x^n}{1+x}, \\ f'(x)-\varphi'(x) \pm x^n &= \pm\frac{x^{n+1}}{1+x}. \end{aligned}\right\}$$

Вторыя части этихъ уравненій – противоположны по знаку; слѣдовательно, изъ двухъ функцій: $f(x)-\varphi(x)$ и $f(x)-\varphi(x)\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}$ одна возрастаетъ, а другая убываетъ, въ то время какъ x возрастаетъ отъ 0 до u, потому что ихъ производныя—противоположны по знаку; отсюда заключаемъ, что такъ какъ обѣ эти функціи обращаются въ нуль при $x=0$, то при $x=u$ онѣ будутъ съ противоположными знаками, т.-е. $f(u)$ будетъ содержаться между

$$\varphi(u) \text{ и } \varphi(u)\mp\frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

Итакъ, обозначая черезъ θ нѣкоторое положительное число, меньшее 1, получимъ равенство:

$$f(u)=\varphi(u)\mp\frac{\theta u^{n+1}}{n+1};$$

замѣчая же, что $\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}$ стремится къ нулю при увеличеніи n, можемъ написать:

$$\mathrm{L}(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\ldots \qquad (b)$$

Такъ же, какъ и въ концѣ предыдущаго параграфа, приведенное доказательство вмѣстѣ съ тѣмъ показываетъ, что вторая часть равенства (b) есть сходящійся рядъ, когда u меньше 1.

Это же доказательство приложимо, безъ измѣненій, и къ случаю, когда $u=1$; поэтому, предыдущій рядъ можетъ дать неперовъ логариѳмъ 2:

$$\mathrm{L}2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

§ 158. Формула для вычисленія неперовыхъ логариѳмовъ.—Обратимся къ двумъ выведеннымъ формуламъ:

$$L(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$$
$$-L(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \ldots;$$

складывая ихъ по-членно и замѣчая, что

$$L(1+u) - L(1-u) = L\left(\frac{1+u}{1-u}\right),$$

получимъ:

$$L\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\right); \quad (1)$$

и такъ какъ $\frac{1+u}{1-u}$ больше 1, то полагаемъ:

$$\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{h}{N} = \frac{N+h}{N},$$

откуда

$$u = \frac{h}{2N+h};$$

принимая, наконецъ, во вниманіе равенство

$$L\frac{N+h}{N} = L(N+h) - LN,$$

мы можемъ уравненіе (1) преобразовать въ слѣдующее:

$$L(N+h) = LN + 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \ldots\right]. \quad (c)$$

Эта формула, гдѣ N и h обозначаютъ два какихъ-угодно положительныхъ числа, *даетъ возможность вычислить* $L(N+h)$, *когда извѣстенъ* LN.

§ 159. Предѣлъ допускаемой ошибки, когда останавливаемся на нѣкоторомъ членѣ. — Отбрасывая во второй части уравненія (c) всѣ члены, слѣдующіе за $2\frac{h^{2i+1}}{(2i+1)(2N+h)^{2i+1}}$, мы сдѣлаемъ ошибку e, которая, очевидно, будетъ меньше

$$2\frac{h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+3}}\left[1 + \left(\frac{h}{2N+h}\right)^2 + \left(\frac{h}{2N+h}\right)^4 + \ldots\right],$$

т.-е. меньше

$$\frac{2h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+3}\left[1-\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2\right]},$$

или, послѣ упрощенія,

$$\varepsilon < \frac{h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+1}\,2N(N+h)}. \qquad (d)$$

Въ частномъ случаѣ, если мы отбросимъ въ выведенномъ ряду всѣ члены, кромѣ перваго, т.-е. если напишемъ просто:

$$\mathrm{L}(N+h)=\mathrm{L}N+\frac{2h}{2N+h},$$

то допущенная ошибка будетъ меньше

$$\frac{h^3}{6N(N+h)(2N+h)},$$

а тѣмъ болѣе меньше

$$\frac{1}{12}\left(\frac{h}{N}\right)^3.$$

§ 160. Вычисленіе L10.—Модуль обыкновенной системы есть величина, обратная неперову логариѳму 10. Весьма важно знать это число. Чтобы его вычислить, ищемъ сначала L10. Зная, что

$$\mathrm{L}10=\mathrm{L}2+\mathrm{L}5,$$

составляемъ отдѣльно L2 и L5. Для этого полагаемъ въ формулѣ (*c*) $N=1$, $h=1$:

$$\mathrm{L}2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}+\frac{1}{11.3^{11}}+\ldots\right);$$

затѣмъ, въ той же формулѣ полагаемъ $N=4$, $h=1$ и принимаемъ во вниманіе равенство: $\mathrm{L}4=2\mathrm{L}2$; получаемъ:

$$\mathrm{L}5=2\mathrm{L}2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\frac{1}{9.9^9}+\frac{1}{11.9^{11}}+\ldots\right).$$

Слѣдовательно,

$$\mathrm{L}10=6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\ldots\right)+$$
$$+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\ldots\right),$$

или, по выполненіи умноженія,

$$L10 = \left(2 + \frac{2}{3.3^2} + \frac{2}{5.3^4} + \frac{2}{7.3^6} + \ldots\right) + \\ + \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3.3^6} + \frac{2}{5.3^{10}} + \frac{2}{7.3^{14}} + \ldots\right). \qquad (c)$$

Сначала вычисляемъ числа: $\frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^4}, \frac{2}{3^6}, \frac{2}{3^8}, \ldots$, каждое изъ которыхъ есть девятая часть предыдущаго; находимъ:

$\frac{2}{3^2}$ =	0,22222	22222	22222	22222	22
$\frac{2}{3^4}$ =	0,02469	13580	24691	35802	47
$\frac{2}{3^6}$ =	0,00274	34842	24965	70644	72
$\frac{2}{3^8}$ =	0,00030	48315	80551	74516	08
$\frac{2}{3^{10}}$ =	0,00003	38701	75616	86057	34
$\frac{2}{3^{12}}$ =	0,00000	37633	52846	31784	15
$\frac{2}{3^{14}}$ =	0,00000	04181	50316	25753	79
$\frac{2}{3^{16}}$ =	0,00000	00464	61146	25083	75
$\frac{2}{3^{18}}$ =	0,00000	00051	62349	58342	64
$\frac{2}{3^{20}}$ =	0,00000	00005	73594	39816	85
$\frac{2}{3^{22}}$ =	0,00000	00000	63732	71090	65
$\frac{2}{3^{24}}$ =	0,00000	00000	07081	41232	29
$\frac{2}{3^{26}}$ =	0,00000	00000	00786	82359	14
$\frac{2}{3^{28}}$ =	0,00000	00000	00087	42485	35
$\frac{2}{3^{30}}$ =	0,00000	00000	00009	71387	15
$\frac{2}{3^{32}}$ =	0,00000	00000	00001	07931	91
$\frac{2}{3^{34}}$ =	0,00000	00000	00000	11992	43
$\frac{2}{3^{36}}$ =	0,00000	00000	00000	01332	49

$\frac{2}{3^{38}}=$	0,00000	00000	00000	00148	05
$\frac{2}{3^{40}}=$	0,00000	00000	00000	00016	45
$\frac{2}{3^{42}}=$	0,00000	00000	00000	00001	83
$\frac{2}{3^{44}}=$	0,00000	00000	00000	00000	20

Затѣмъ составляемъ члены перваго ряда, дѣля полученныя такимъ образомъ числа соотвѣтственно на 3,5,7,...; находимъ:

2,				
0,07407	40740	74074	07407	41
0,00493	82716	04938	27160	49
0,00039	19263	17852	24377	82
0,00003	38701	75616	86057	34
0,00000	30791	06874	26005	21
0,00000	02894	88680	48598	78
0,00000	00278	76687	75050	25
0,00000	00027	33008	60299	04
0,00000	00002	71702	60965	40
0,00000	00000	27314	01895	99
0,00000	00000	02770	98743	07
0,00000	00000	00283	25649	29
0,00000	00000	00029	14161	45
0,00000	00000	00003	01464	98
0,00000	00000	00000	31335	07
0,00000	00000	00000	03270	66
0,00000	00000	00000	00342	64
0,00000	00000	00500	00036	01
0,00000	00000	00000	00003	79
0,00000	00000	00000	00000	40
0,00000	00000	00000	00000	04
2,07944	15416	79835	92825	13 = 3L2.

Точно такъ же составляемъ члены второго ряда; находимъ:

0,22222	22222	22222	22222	22
0,00091	44947	41655	23548	24
0,00000	67740	35123	37211	47

0,00000	00597	35759	46536	26
0,00000	00005	73594	39815	85
0,00000	00000	05793	88280	97
0,00000	00000	00060	52489	16
0,00000	00000	00000	64759	14
0,00000	00000	00000	00705	44
0,00000	00000	00000	00007	79
0,00000	00000	00000	00000	09
0,22314	35513	14209	75576	63.

Теперь складываемъ оба полученныхъ результата:

$$\mathrm{L}10 = 2{,}30258 \quad 50929 \quad 94045 \quad 68402,$$

откуда получаемъ, посредствомъ дѣленія, модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ:

$$\frac{1}{\mathrm{L}10} = \log e = \frac{1}{2{,}302\ldots} = 0{,}43429 \quad 44819 \quad 03251 \quad 82765.$$

§ 161. Вычисленіе обыкновенныхъ логариѳмовъ. — Чтобы получить обыкновенные логариѳмы, т.-е. логариѳмы въ системѣ съ основаніемъ 10, нужно умножить неперовы логариѳмы на множитель $\frac{1}{\mathrm{L}10}$, только-что вычисленный. Можно также вычислить обыкновенные логариѳмы и непосредственно, замѣтивъ, что если обозначить найденный модуль черезъ M и для обозначенія этихъ логариѳмовъ употребить, какъ обыкновенно, символъ log, то формула (e) перейдетъ въ слѣдующую:

$$\log(N+h) - \log N = 2M\left\{\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2N+h)^3} + \ldots\right\}.$$

Полагая здѣсь $h = 1$, находимъ:

$$\log(N+1) - \log N = \left\{\frac{2M}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{2M}{(2N+1)^3} + \ldots\right\}. \qquad (f)$$

Этою формулою и пользовались составители употребляемыхъ въ настоящее время таблицъ. Вычисляются логариѳмы только простыхъ чиселъ; остальные находятся посредствомъ сложенія. Первыя вычисленія трудны; но когда уже дошли до числа 101, то достаточно двухъ

членовъ предыдущаго ряда для полученія его логариѳма съ восемью цифрами послѣ запятой; послѣ 1000 достаточно одного перваго члена.

II. Ряды для вычисленія числа π.

§ 162. Разложеніе $\operatorname{arctang} u$. — Пусть x обозначаетъ перемѣнную, измѣняющуюся отъ 0 до нѣкотораго постояннаго предѣла u, меньшаго или равнаго единицѣ. Полагаемъ:

$$f(x) = \operatorname{arctang} x;$$

эта дуга обращается въ нуль одновременно съ x и затѣмъ измѣняется непрерывно вмѣстѣ съ этою перемѣнною. Выводимъ:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2} + \frac{x^{4n}}{1+x^2}.$$

Положимъ еще:

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2};$$

отсюда заключаемъ, что

$$f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^2},$$

т.-е. что разность $f'(x) - \varphi'(x)$ постоянно положительна и меньше x^{4n}, а потому можно написать:

$$f'(x) - \varphi'(x) > 0,$$
$$f'(x) - \varphi'(x) - x^{4n} < 0.$$

Послѣднія неравенства показываютъ, что функція $f(x) - \varphi(x)$ возрастаетъ, а функція $f(x) - \varphi(x) - \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ убываетъ при измѣненіи x отъ 0 до u. Кромѣ того, обѣ эти функціи обращаются въ нуль

при $x=0$. Изъ сказаннаго выводимъ, что при $x=u$ первая функція положительна, а вторая — отрицательна; это значитъ, что $f(u)$ содержится между $\varphi(u)$ и $\varphi(u)+\frac{u^{4n+1}}{4n+1}$. Поэтому, обозначая черезъ θ положительный коэффиціентъ, меньшій 1, мы можемъ написать:

$$f(u)=\varphi(u)+\theta\frac{u^{4n+1}}{4n+1},$$

т. е.

$$\operatorname{arctang} u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\ldots-\frac{u^{4n-1}}{4n-1}+\theta\frac{u^{4n+1}}{4n+1};$$

а такъ какъ при достаточно большомъ n членъ $\theta\frac{u^{4n+1}}{4n+1}$ можетъ быть сдѣланъ сколь-угодно малымъ, то

$$\operatorname{arctang} u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}-\ldots \qquad (g)$$

Такъ какъ обѣ части этой формулы мѣняютъ знакъ одновременно съ u, то она, очевидно, прилагается къ значеніямъ u между -1 и $+1$.

§ 163. Случай, когда u больше единицы.—Если бы тангенсъ, равный u, былъ больше единицы, то рядъ, дающій соотвѣтственную дугу, сталъ бы расходящимся и потерялъ бы всякое значеніе; но, несмотря на это, все-таки можно было бы легко вычислить искомую дугу, вычисливъ сначала $\operatorname{arctang}\frac{1}{u}$, для которой рядъ будетъ сходящимся и которая, очевидно, служитъ дополненіемъ первой дуги до $\frac{\pi}{2}$.

Пусть, напр., требуется найти $\operatorname{arctang} 4{,}49341$; воспользуемся формулою:

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctang} u=\operatorname{arctang}\frac{1}{u}=\frac{1}{u}-\frac{1}{3u^3}+\frac{1}{5u^5}-\frac{1}{7u^7}+\ldots$$

Для вычисленія послѣдовательныхъ членовъ этого ряда составляемъ сначала дроби: $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^3}, \frac{1}{u^5}, \ldots$, что не трудно сдѣлать, такъ какъ каждая изъ нихъ получается изъ предыдущей посредствомъ дѣленія на постоянное число

$$u^2=20{,}19073\quad 34281;$$

такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{1}{u} = 0{,}22254 \quad 81315 \quad 97161$$
$$\frac{1}{u^3} = 0{,}01102 \quad 22906 \quad 16122$$
$$\frac{1}{u^5} = 0{,}00054 \quad 59083 \quad 81950$$
$$\frac{1}{u^7} = 0{,}00002 \quad 70375 \quad 70670$$
$$\frac{1}{u^9} = 0{,}00000 \quad 13391 \quad 07902$$
$$\frac{1}{u^{11}} = 0{,}00000 \quad 00663 \quad 22895$$
$$\frac{1}{u^{13}} = 0{,}00000 \quad 00032 \quad 84819$$
$$\frac{1}{u^{15}} = 0{,}00000 \quad 00001 \quad 62689$$
$$\frac{1}{u^{17}} = 0{,}00000 \quad 00000 \quad 08058$$
$$\frac{1}{u^{19}} = 0{,}00000 \quad 00000 \quad 00399$$
$$\frac{1}{u^{21}} = 0{,}00000 \quad 00000 \quad 00020,$$

откуда

$$\frac{1}{u} = 0{,}22254 \; 81315 \; 97161$$
$$\frac{1}{5u^5} = 0{,}00010 \; 91816 \; 76390$$
$$\frac{1}{9u^9} = 0{,}00000 \; 01487 \; 89767$$
$$\frac{1}{13u^{13}} = 0{,}00000 \; 00002 \; 52678$$
$$\frac{1}{17u^{17}} = 0{,}00000 \; 00000 \; 00474$$
$$\frac{1}{21u^{21}} = 0{,}00000 \; 00000 \; 00001$$
$$= 0{,}22265 \; 74623 \; 16471$$

$$\frac{1}{3u^3} = 0{,}00367 \; 40968 \; 72041$$
$$\frac{1}{7u^7} = 0{,}00000 \; 38625 \; 10096$$
$$\frac{1}{11u^{11}} = 0{,}00000 \; 00060 \; 29354$$
$$\frac{1}{15u^{15}} = 0{,}00000 \; 00000 \; 10846$$
$$\frac{1}{19u^{19}} = 0{,}00000 \; 00000 \; 00021$$
$$= 0{,}00367 \; 79654 \; 22358;$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{arccotang} 4{,}49341 = +\,0{,}22265 \quad 74623 \quad 16471$$
$$-\,0{,}00367 \quad 79654 \quad 22358$$
$$\operatorname{arccotang} 4{,}49341 = 0{,}21897 \quad 94968 \quad 94113.$$

Наконецъ,

$$\operatorname{arctang} 4{,}49341 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotang} 4{,}49341 =$$
$$= +1{,}57079\ \ 63267\ \ 94897$$
$$-0{,}21897\ \ 94968\ \ 94113$$
$$\operatorname{arctang} 4{,}49341 = \ \ 1{,}35181\ \ 68299\ \ 00784.$$

§ 164. Вычисленіе отношенія окружности къ діаметру. — Если въ вышедоказанной (§ 162) формулѣ положить $u=1$, то дуга, тангенсъ которой есть u, будетъ равна $\frac{\pi}{4}$, и мы получимъ:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Этотъ рядъ — сходящійся, но для вычисленія π — неудобенъ, такъ какъ его члены убываютъ слишкомъ медленно.

Можно составить другія выраженія, которыя быстро приводятъ къ весьма приближеннымъ значеніямъ этого числа. Полагаемъ:

$$\operatorname{arctang} x = p,\ \ \operatorname{arctang} y = q;$$

отсюда выводимъ;

$$x = \operatorname{tang} p,\ \ y = \operatorname{tang} q,$$
$$\operatorname{tang}(p+q) = \frac{\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q}{1 - \operatorname{tang} p \operatorname{tang} q} = \frac{x+y}{1-xy};$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{arctang} x + \operatorname{arctang} y = \operatorname{arctang} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Точно такъ же

$$\operatorname{arctang} x - \operatorname{arctang} y = \operatorname{arctang} \frac{x-y}{1+xy}.$$

Полагая въ формулѣ для $\operatorname{tang}(p+q)$ послѣдовательно $q=p$, $q=2p$, $q=3p, \ldots$, находимъ:

$$2\operatorname{arctang} x = \operatorname{arctang} \frac{2x}{1-x^2},$$
$$3\operatorname{arctang} x = \operatorname{arctang} \frac{3x-x^3}{1-3x^2},$$
$$4\operatorname{arctang} x = \operatorname{arctang} \frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4},$$

. . . .

Придавая x и y различныя значенія, мы изъ предыдущихъ формулъ получимъ:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} 1 &= \operatorname{arctang}\frac{1}{2} + \operatorname{arctang}\frac{1}{3},\\ &= \operatorname{arctang}\frac{1}{2} + \operatorname{arctang}\frac{1}{5} + \operatorname{arctang}\frac{1}{8},\\ &= 2\operatorname{arctang}\frac{1}{2} - \operatorname{arctang}\frac{1}{7},\\ &= 2\operatorname{arctang}\frac{1}{3} + \operatorname{arctang}\frac{1}{7},\\ &= 3\operatorname{arctang}\frac{1}{3} - \operatorname{arctang}\frac{2}{11},\\ &= 4\operatorname{arctang}\frac{1}{5} - \operatorname{arctang}\frac{1}{239}.\end{aligned}$$

Послѣднее изъ этихъ выраженій – самое удобное для вычисленія $\frac{\pi}{4}$.

Приведемъ таблицу необходимыхъ вычисленій; по формулѣ (y) имѣемъ:

$$\pi = 4\operatorname{arctang}\frac{1}{5} - \operatorname{arctang}\frac{1}{239} =$$
$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

Различные члены ряда $\operatorname{arctang}\frac{1}{239}$, выраженные въ десятичныхъ дробяхъ, даютъ:

$\frac{1}{239}=$	0,00418	41004	18410	04184	10
$-\frac{1}{3.239^3}=$	−0,00000	00244	16591	78708	38
$\frac{1}{5.239^5}=$	0,00000	00000	00256	47231	44
$-\frac{1}{7.239^7}=$	−0,00000	00000	00000	00320	71
$\operatorname{arctang}\frac{1}{239}=$	0,00418	40760	02074	73386	45.

Для нахожденія $\operatorname{arctang}\frac{1}{5}$ вычисляемъ сначала положительные члены ряда:

$\frac{1}{5}=$	0,20000	00000	00000	00000	00
$\frac{1}{5.5^5}=$	0,00006	40000	00000	00000	00
$\frac{1}{9.5^9}=$	0,00000	00568	88888	88888	89

$\frac{1}{13.5^{13}}$	$=0{,}00000$	00000	63015	38461	54
$\frac{1}{17.5^{17}}$	$=0{,}00000$	00000	00077	10117	65
$\frac{1}{21.5^{21}}$	$=0{,}00000$	00000	00000	09986	44
$\frac{1}{25.5^{25}}$	$=0{,}00000$	00000	00000	00013	42
$\frac{1}{29.5^{29}}$	$=0{,}00000$	00000	00000	00000	02
Сумма	$=0{,}20006$	40569	51981	47467	96.

Далѣе, вычисляемъ отрицательные члены:

$\frac{1}{3.5^{3}}$	$=0{,}00266$	66666	66666	66666	67
$\frac{1}{7.5^{7}}$	$=0{,}00000$	18285	71428	57142	86
$\frac{1}{11.5^{11}}$	$=0{,}00000$	00018	61818	18181	82
$\frac{1}{15.5^{15}}$	$=0{,}00000$	00000	02184	53333	33
$\frac{1}{19.5^{19}}$	$=0{,}00000$	00000	00002	75941	05
$\frac{1}{23.5^{23}}$	$=0{,}00000$	00000	00000	00464	72
$\frac{1}{27.5^{27}}$	$=0{,}00000$	00000	00000	00000	50
Сумма	$=0{,}00266$	84971	02100	71630	95

Вычитая эту послѣднюю сумму изъ суммы положительныхъ членовъ, мы для значенія дуги, тангенсъ которой есть $\frac{1}{5}$, получимъ:

$$\operatorname{arctang}\frac{1}{5}=0{,}19739\quad 55598\quad 49880\quad 75837\quad 01,$$

откуда

$$4\operatorname{arctang}\frac{1}{5}=0{,}78958\quad 22393\quad 99523\quad 03348\quad 04;$$

и такъ какъ

$$\operatorname{arctang}\frac{1}{239}=0{,}00418\quad 40760\quad 02074\quad 72386\quad 45,$$

то

$$\frac{\pi}{4}=0{,}78539\quad 81633\quad 97448\quad 30961\quad 59.$$

Слѣдовательно,

$$\pi=3{,}14159\quad 26535\quad 89793\quad 23846.$$

КОНСПЕКТЪ

§ 156. Разложеніе въ рядъ $-L(1-u)$, при чемъ u заключается между 0 и 1. — § 157. Разложеніе $L(1+u)$. — § 158. Рядъ, выражающій $L(N+h)-LN$. — § 159. Предѣлъ допускаемой ошибки, когда останавливаются на данномъ членѣ. — § 160. Вычисленіе неперова логариѳма 10. — § 161. Вычисленіе обыкновенныхъ логариѳмовъ. — § 162. Разложеніе $\operatorname{arctang} u$, когда u меньше 1. — § 163. Разложеніе $\operatorname{arccos} u$, когда u больше 1; численное приложеніе. — § 164. Вычисленіе π съ двадцатью знаками послѣ запятой.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Доказать формулу:

$$Lx=\frac{L(1+x)+L(1-x)}{2}+\left[\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3(2x^2-1)^3}+\ldots\right].$$

Прилагается формула (1) § 158-го.

II. Доказать формулу:

$$L(x+5)=L(x+3)+L(x-3)+L(x+4)+L(x-4)-L(x-5)-2Lx-$$
$$2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\ldots\right].$$

Прилагается та же формула.

III. Если черезъ a и b обозначить два данныхъ положительныхъ числа и составить новый рядъ чиселъ по формуламъ:

$$a'=\frac{1}{2}\left(a+b\right),\ \ b'=\sqrt{a'b}\,,$$
$$a''=\frac{1}{2}\left(a'+b'\right),\ \ b''=\sqrt{a'b'}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и если, кромѣ того, положить $a=b\cos\varphi$, то $a^{(m)}$ и $b^{(m)}$ выразятся посредствомъ формулъ:

$$a^{(m)}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2^m\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2^m}\right)},\ \ b^{(m)}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2^m\sin\left(\frac{\varphi}{2^m}\right)}$$

и общій предѣлъ, къ которому стремятся $a^{(m)}$ и $b^{(m)}$, будетъ $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\varphi}$. При $a=0$, $b=1$ этотъ предѣлъ обратится въ $\frac{2}{\pi}$.

Исходятъ изъ слѣдующей, почти очевидной, формулы:

$$\sin\varphi=2^m\sin\left(\frac{\varphi}{2^m}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{8}\ldots\cos\left(\frac{\varphi}{2^m}\right).$$

КНИГА III.

Общая теорія уравненій.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Общіе принципы относительно численныхъ уравненій какой-угодно степени.

I. Измѣненія цѣлой функціи $f(x)$.

§ 165. Общій видъ цѣлой функціи. — Самый общій видъ, подъ которымъ можетъ быть представлена цѣлая функція отъ x, $f(x)$, есть слѣдующій:

$$f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

гдѣ A, A_1, ..., A_m — постоянные коэффиціенты, а m — степень функціи.

При измѣненіи x этотъ многочленъ можетъ мѣнять знакъ въ зависимости отъ законовъ возрастанія и убыванія, весьма различныхъ при различныхъ значеніяхъ и знакахъ коэффиціентовъ. Впрочемъ, существуютъ и общіе принципы, которые, однако, вполнѣ очевидными становятся только въ томъ случаѣ, если ихъ изложить совершенно спеціально, въ примѣненіи къ даннаго вида функціямъ.

§ 166. Теорема I. — *Всякая цѣлая и раціональная функція отъ перемѣнной x есть функція непрерывная. Иными словами, если перемѣнная будетъ возрастать непрерывно, то и функція станетъ измѣ-*

нится также непрерывно и не перейдетъ отъ какого-нибудь одного значенія къ другому, не проходя всѣхъ промежуточныхъ значеній.

Мы докажемъ, что $f(x)$ — непрерывна, если докажемъ, что при достаточно маломъ приращеніи h перемѣнной x приращеніе $f(x+h)-f(x)$ функціи можетъ быть сдѣлано сколь-угодно малымъ.

Изъ предыдущаго мы знаемъ, что предѣломъ отношенія:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

при h, стремящемся къ нулю, будетъ производная отъ $f(x)$, равная

$$f'(x)=mAx^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\ldots+A_{m-1},$$

т.-е.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

гдѣ ε есть нѣкоторое количество, стремящееся къ нулю одновременно съ h. Отсюда получаемъ:

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon].$$

Вся вторая часть этого равенства непремѣнно стремится къ нулю одновременно съ h, такъ какъ $f'(x)$, не имѣя знаменателей, которые могли бы обратиться въ нуль, не можетъ обратиться въ безконечность ни при какомъ значеніи x; слѣдовательно, и первая часть $f(x+h)-f(x)$ также стремится къ нулю одновременно съ h, что̀ и требовалось доказать.

§ 167. Замѣчаніе. — Это доказательство прилагается, очевидно, ко всякой функціи, производная отъ которой — конечна, а въ такомъ случаѣ предыдущую теорему можно высказать въ болѣе общемъ видѣ:

Функція остается непрерывною, пока ея производная не обращается въ безконечность.

§ 168. Теорема II. — *Въ цѣлой функціи:*

$$f(x)=Ax^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

можно всегда придать x достаточно большое значеніе, чтобы первый членъ вышелъ сколь-угодно большимъ по отношенію къ суммѣ всѣхъ остальныхъ членовъ и чтобы, слѣдовательно, его знакъ былъ бы знакомъ даннаго многочлена.

Для доказательства, что первый членъ можетъ стать сколь-угодно большимъ по отношенію къ суммѣ всѣхъ остальныхъ членовъ, очевидно, достаточно доказать, что этотъ членъ можетъ стать сколь-угодно большимъ по отношенію къ каждому изъ остальныхъ, взятому отдѣльно.

Сравнивая первый членъ Ax^m съ общимъ членомъ $A_n x^{m-n}$, находимъ:

$$\frac{Ax^m}{A_n x^{m-n}} = \frac{A}{A_n} x^n;$$

это отношеніе, имѣя множителемъ x^n, можетъ расти безпредѣльно. Поэтому, x можно взять на столько большимъ, что первый членъ будетъ въ тысячу, въ сто тысячъ разъ, въ милліонъ, въ сто милліоновъ разъ, . . . больше какого-угодно изъ остальныхъ членовъ и, слѣдовательно, сколь-угодно большимъ по отношенію къ ихъ суммѣ.

§ 169. Замѣчаніе. — Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, что функція четной степени при весьма большихъ значеніяхъ перемѣнной, положительныхъ или отрицательныхъ, имѣетъ тотъ же знакъ, что и коэффиціентъ при ея первомъ членѣ. Функція нечетной степени также имѣетъ тотъ же знакъ, что и коэффиціентъ ея перваго члена, если перемѣнная получаетъ весьма большое *положительное* значеніе; наоборотъ, она принимаетъ знакъ, противоположный знаку этого коэффиціента, если x при очень большой абсолютной величинѣ — *отрицательно*.

Примѣры: 1) $x^6 - 1000x^4 - 195000x^3 + 1$
положительно при достаточно большомъ, по абсолютной величинѣ, значеніи x, каково бы оно ни было по знаку.

2) $x^7 + 10000000x^6 - x^3 + 1$
положительно при весьма большихъ положительныхъ значеніяхъ x и отрицательно при отрицательныхъ, но достаточно большихъ по абсолютной величинѣ, значеніяхъ x.

II. Теоремы о корняхъ уравненія.

§ 170. Теорема I. — *Если цѣлая функція $f(x)$ при значеніяхъ x:*

$$x = a \text{ и } x = b$$

даетъ результаты съ противоположными знаками, то уравненіе:

$f(x)=0$ *имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень, лежащій между* a *и* b.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы предположимъ, что x измѣняется непрерывно, начиная со значенія $x=a$ и до значенія $x=b$, то $f(x)$ (§ 166) будетъ измѣняться тоже непрерывно, и такъ какъ она переходитъ отъ значенія $f(a)$ къ значенію $f(b)$, противоположному по знаку, то она, слѣдовательно, мѣняетъ свой знакъ; а въ такомъ случаѣ, въ силу непрерывности, она перейдетъ черезъ значеніе нуль, промежуточное между положительными и отрицательными значеніями.

§ 171. Замѣчаніе. — То же разсужденіе прилагается ко всякому уравненію, первая часть котораго есть непрерывная функція отъ перемѣнной x.

§ 172. Теорема II.—*Всякое алгебраическое уравненіе нечетной степени съ вещественными коэффиціентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень, противоположный по знаку его послѣднему члену.*

Пусть

$$f(x)=x^{2n+1}+A_1x^{2n}+A_2x^{2n-1}+\ldots+A_{2n+1}=0$$

будетъ уравненіе нечетной степени. Если на мѣсто x подставить весьма большое отрицательное значеніе, то результатъ такой подстановки будетъ отрицательный (§ 169). Наоборотъ, результатъ будетъ положительный, если на мѣсто x подставить весьма большое положительное значеніе; наконецъ, если на мѣсто x подставить значеніе 0, то функція $f(x)$ сдѣлается равною своему послѣднему члену A_{2n+1}. Результаты этихъ подстановокъ мы можемъ выразить слѣдующею таблицею:

Значенія x	Знаки $f(x)$:
∞	$-$
0	Знакъ A_{2n+1}
$+\infty$	$+$

Итакъ, если A_{2n+1} отрицательно, то $f(x)$ мѣняетъ знакъ, когда x проходитъ значенія отъ 0 до $+\infty$, и слѣдовательно, имѣетъ положительный корень. Если A_{2n+1} положительно, то $f(x)$ пріобрѣтаетъ значенія, противоположныя по знаку, при $x=0$ и при $x=-\infty$ и, слѣдовательно, имѣетъ отрицательный корень.

Примѣры: 1) Уравненіе

$$x^7 - 8x^5 + 3x^3 - 3 = 0$$

имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ положительный корень.

2) Уравненіе:

$$x^9 + 8x^4 + 3 = 0$$

имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ отрицательный корень.

§ 173. Теорема III. — *Алгебраическое уравненіе четной степени съ вещественными коэффиціентами, послѣдній членъ котораго — отрицательный, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, два вещественныхъ корня.*

Пусть

$$f(x) = x^{2m} + A_1x^{2m-1} + A_2x^{2m-2} + \dots + A_{2m-1}x + A_{2m} = 0$$

будетъ уравненіе четной степени, при чемъ послѣдній членъ — отрицательный. По предыдущему можно составить слѣдующую таблицу:

Значенія x:	Знаки $f(x)$:
$-\infty$	$+$
0	$-$
$+\infty$	$+$

Итакъ, когда x измѣняется отъ $-\infty$ до 0, $f(x)$ мѣняетъ знакъ; то же происходитъ и тогда, когда x измѣняется отъ 0 до $+\infty$. Поэтому, одинъ корень непремѣнно лежитъ между $-\infty$ и 0, а другой—между 0 и $+\infty$; иначе говоря, существуютъ два корня, одинъ — положительный и другой — отрицательный.

III. Число корней уравненія.

§ 174. Постулятъ. — Примемъ безъ доказательства слѣдующее основное предложеніе, которое — спѣшимъ прибавить — можетъ быть доказано со всею строгостью:

Всякое алгебраическое уравненіе съ одною неизвѣстною, содержащее только цѣлыя и положительныя степени этой неизвѣстной, при чемъ коэффиціенты суть данныя числа, вещественныя или мнимыя вида $m + n\sqrt{-1}$, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень: или вещественный, или мнимый вида $a + b\sqrt{-1}$, гдѣ a и b обозначаютъ вещественныя числа.

Принявъ это предложеніе, мы немедленно выведемъ слѣдующее:

§ 175. Основная теорема. — Всякое уравненіе, m-ой степени, вида:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \qquad (1)$$

гдѣ $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ данныя, вещественныя или мнимыя, числа, имѣетъ ровно m корней, вещественныхъ или мнимыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи постулята уравненіе (1):

$$X = 0,$$

гдѣ X обозначаетъ его первую часть, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень. Назовемъ этотъ корень черезъ a; каковъ бы онъ ни былъ, вещественный или мнимый, X будетъ дѣлиться на $(x-a)$ *). Обозначимъ частное буквою Q; во всѣхъ случаяхъ оно будетъ $(m-1)$ ой степени и первый его членъ будетъ равенъ Ax^{m-1}. Пишемъ тождество:

$$X = (x-a)Q; \qquad (2)$$

коэффиціенты Q будутъ даннаго вида, вещественные или мнимые. На основаніи того же постулята всякое уравненіе, а слѣдовательно, и $Q = 0$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень; обозначая его черезъ b, получимъ:

$$Q = (x-b)Q_1,$$

и уравненіе (2) приметъ видъ:

$$X = (x-a)(x-b)Q_1. \qquad (3)$$

Точно такъ же уравненіе: $Q_1 = 0$, степень котораго есть $(m-2)$, а первый членъ, очевидно, равенъ Ax^{m-2}, должно имѣть, по крайней мѣрѣ, одинъ корень. Обозначая послѣдній черезъ c, получимъ:

$$Q_1 = (x-c)Q_2,$$

и, слѣдовательно,

$$X = (x-a)(x-b)(x-c)Q_2, \qquad (4)$$

при чемъ первый членъ Q_2, очевидно, равенъ Ax^{m-3}. Посту-

*) Доказательство этой теоремы, приведенное въ I ч., въ §§ **76** и **77**, прилагается безъ измѣненій и къ тому случаю, когда a — мнимое.

ная съ Q_2 такъ же, какъ съ Q и Q_1, и продолжая такимъ же образомъ и далѣе, приходимъ къ заключенію, что каждое подобное дѣйствіе даетъ по одному множителю первой степени, и что послѣдній изъ нихъ будетъ численнымъ, такъ какъ степень послѣдовательныхъ частныхъ постоянно уменьшается; этотъ множитель, очевидно, равенъ A. Итакъ,

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)A. \quad (5)$$

Полученное равенство показываетъ, что уравненіе $X=0$ удовлетворяется значеніями: $x=a$, $x=b$, $x=c$, ..., $x=l$ и что другихъ корней оно не имѣетъ, дѣйствительно, всякое другое значеніе, приписанное x, не обращая въ нуль ни одного изъ множителей второй части, не можетъ обратить въ нуль и произведенія, что мы сейчасъ и покажемъ.

§ 176. Замѣчаніе. — *Произведеніе нѣсколькихъ множителей равно нулю только тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю.*

Въ случаѣ вещественныхъ множителей это предложеніе очевидно, но его не трудно распространить и на случай мнимыхъ множителей. Пусть будетъ дано произведеніе:

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1});$$

выполняемъ умноженіе:

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}; \quad (1)$$

слѣдовательно, чтобы заданное произведеніе равнялось нулю, нужно, чтобы заразъ

$$\left.\begin{aligned} aa'-bb'=0\,, \\ ab'+ba'=0\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Составляя сумму квадратовъ этихъ двухъ равенствъ, получаемъ:

$$(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2=0\,. \quad (3)$$

Такъ какъ первая часть послѣдняго равенства тождественно равна $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$, то она не можетъ обратиться въ нуль иначе, какъ только при условіи: $a=0$, $b=0$, или же при условіи: $a'=0$, $b'=0$; другими словами, необходимо, чтобы или

$$a+b\sqrt{-1}=0, \text{ или же } a'+b'\sqrt{-1}=0.$$

Кромѣ того очевидно, что этого условія достаточно.

§ 177. Второе замѣчаніе. — Формула (5) § 175-го показываетъ, что первая часть уравненія всегда разлагается на множителей первой степени, и кромѣ того даетъ возможность составить первую часть уравненія m-ой степени, когда извѣстны m его корней. Эта первая часть не содержитъ ничего произвольнаго, кромѣ коэффиціента A, на который, очевидно, можно умножить обѣ части уравненія, не измѣняя ни самыхъ корней, ни числа ихъ. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что *два уравненія съ одними и тѣми же корнями могутъ различаться только постояннымъ множителемъ.*

§ 178. Тождественные многочлены. — Такъ какъ уравненіе m-ой степени не можетъ имѣть болѣе m корней, то *два многочлена m-ой степени относительно x будутъ вполнѣ тождественными, если они равны между собою болѣе, чѣмъ при m значеніяхъ перемѣнной x.* Въ самомъ дѣлѣ, если ихъ разность приравнять нулю, то получится уравненіе m-ой степени, которое, если не представляетъ тождества, то не можетъ удовлетворяться болѣе чѣмъ при m значеніяхъ перемѣнной.

§ 179. Равные корни. — При доказательствѣ основной теоремы (**§ 175**) не предполагалось, что корни: $a, b, c, \ldots, k, l$ — различны, поэтому число *различныхъ* корней уравненія m-ой степени въ дѣйствительности не всегда равно m. Не смотря на это, всѣ теоремы излагаются именно при такомъ предположеніи; чтобы имѣть на это право, говорятъ, что корень a — двойной, тройной, четверной, ..., если соотвѣтствующій ему множитель $(x-a)$ входитъ въ произведеніе, представляющее первую часть уравненія, два, три, четыре, ... раза.

IV. Сопряженные мнимые корни.

§ 180. Теорема. — *Если уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ мнимый корень $a+b\sqrt{-1}$, то оно непремѣнно имѣетъ и сопряженный корень $a-b\sqrt{-1}$, и притомъ такой же кратности, какъ и первый.*

Если уравненіе:

$$X=0,$$

по предположенію, удовлетворяется значеніемъ

$$x=a+b\sqrt{-1},$$

то первая часть X дѣлится на $(x-a)^2+b^2$. Въ самомъ дѣлѣ, производимъ дѣленіе; остатокъ будетъ всегда вида $mx+n$, такъ какъ его степень ниже степени дѣлителя; получаемъ:

$$X=[(x-a)^2+b^2]Q+mx+n, \tag{1}$$

при чемъ m и n — вещественныя числа, потому что при выполненіи дѣленія не можетъ войти никакое мнимое выраженіе. Если, теперь, въ обѣихъ частяхъ тождества (1), справедливаго при всякомъ x, положить $x=a+b\sqrt{-1}$, то первая часть, по предположенію, обратится въ нуль. Очевидно, то же случится и съ $(x-a)^2+b^2$; слѣдовательно, должно быть:

$$0=m(a+b\sqrt{-1})+n,$$

а это необходимо приводитъ къ двумъ равенствамъ:

$$ma+n=0,\ mb=0,$$

и такъ какъ b не равно нулю, то

$$m=0,\ n=0.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$X=[(x-a)^2+b^2]Q.$$

Множитель $[(x-a)^2+b^2]$ второй части послѣдняго равенства обращается въ нуль при $x=a-b\sqrt{-1}$; значитъ, и X обратится въ нуль при этомъ значеніи.

Если X дѣлится на $(x-a-b\sqrt{-1})^2$, т.-е. если $a+b\sqrt{-1}$ есть двойной корень, то Q непремѣнно дѣлится на $(x-a-b\sqrt{-1})$; и въ такомъ случаѣ такъ же, какъ и для X, можно доказать, что Q дѣлится на $(x-a)^2+b^2$; получится равенство:

$$X=[(x-a)^2+b^2]^2Q_1=[x-(a+b\sqrt{-1})]^2[x-(a-b\sqrt{-1})]^2Q_1,$$

изъ котораго видно, что и корень $a-b\sqrt{-1}$ будетъ двойнымъ для X.

Если $a+b\sqrt{-1}$ есть тройной корень для X, то X должно дѣлиться на $(x-a-b\sqrt{-1})^3$ и, слѣдовательно, Q_1 должно имѣть множителемъ $(x-a-b\sqrt{-1})$; а въ такомъ случаѣ можно доказать такъ

же, какъ для X и Q, что и Q_1 дѣлится на $(x-a)^2+b^2$; получится равенство:

$$X=[(x-a)^2+b^2]^3Q_2=[x-(a+b\sqrt{-1})]^3[x-(a-b\sqrt{-1})]^3Q_2,$$

изъ котораго видно, что корень $a-b\sqrt{-1}$ будетъ также тройнымъ, какъ и его сопряженный.

Очевидно, что подобное разсужденіе можно продолжать неопредѣленно далеко, а это показываетъ, что корень $a-b\sqrt{-1}$ будетъ той же степени кратности, какъ и его сопряженный.

V. Соотношенія между коэффиціентами и корнями уравненія.

§ 181. Теорема. — Дано уравненіе m-ой степени.

$$x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$$

и для простоты предположено, что коэффиціентъ перваго члена равенъ единицѣ. Выше мы вывели тождество:

$$x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l), \qquad (1)$$

гдѣ $a, b, c, \ldots, k, l$ суть корни даннаго уравненія. Если же выполнить умноженіе во второй части этого тождества, то (§ 37) первымъ членомъ будетъ x^m; вторымъ произведеніе x^{m-1} на сумму вторыхъ членовъ: $-a, -b, \ldots, -l$; третьимъ — произведеніе x^{m-2} на сумму произведеній по два изъ $-a, -b, -c, \ldots, -l$, или, что то же самое, на сумму произведеній по два изъ $a, b, c, \ldots, l$, и т. д., такъ что, обозначая соотвѣтственно черезъ Σa, Σab, Σabc, ... сумму корней, сумму ихъ произведеній по два, сумму ихъ произведеній по три, ..., мы можемъ написать:

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)=$$
$$=x^m-x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab-x^{m-3}\Sigma abc+\ldots\pm abc\ldots kl; \qquad (2)$$

послѣдній членъ здѣсь будетъ со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, каково m: четное или нечетное. Сравнивая тождественно это произведеніе съ первою частью уравненія (1), получаемъ слѣдующую теорему:

Во всякомъ алгебраическомъ уравненіи, въ которомъ коэффиціентъ при первомъ членѣ есть единица, т.-е. въ уравненіи вида:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

коэффиціентъ A_1 при второмъ членѣ равенъ суммѣ корней, взятой съ обратнымъ знакомъ,

коэффиціентъ A_2 при третьемъ членѣ равенъ суммѣ произведеній корней по два;

коэффиціентъ A_3 при четвертомъ членѣ есть сумма ихъ произведеній по три, взятая съ обратнымъ знакомъ; и т. д.

наконецъ, *послѣдній членъ A_m равенъ произведенію всѣхъ корней, взятому съ его знакомъ или съ противоположнымъ, смотря по тому, какова степень уравненія: четная или нечетная.*

§ 182. Замѣчаніе I. — Предыдущая теорема выражается слѣдующими уравненіями:

$$(3)\quad \begin{cases} A_1 = -(a + b + c + \dots + k + l), \\ A_2 = (ab + ac + \dots + lc + \dots + kl), \\ A_3 = -(abc + abd + \dots + acd + \dots + akl + \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_m = \mp abc \dots kl. \end{cases}$$

Если разсматривать корни, какъ неизвѣстныя, то у насъ будетъ m различныхъ уравненій, которымъ они должны удовлетворять. Когда нѣкоторые изъ корней — извѣстны, то эти уравненія могутъ облегчить нахожденіе остальныхъ; *вообще* же, они не могутъ служить для полнаго рѣшенія заданнаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы разыскивали при помощи этихъ уравненій, напр., корень a, то для этого понадобилось бы исключить всѣ остальные; но какимъ бы образомъ мы ни произвели бы это исключеніе, мы получили бы уравненіе, которое должно удовлетворяться не только корнемъ a, но и всѣми остальными: $b, c, \dots k, l$. Дѣйствительно, замѣчая, что всѣ корни входятъ въ уравненія (3) совершенно одинаковымъ образомъ и что, слѣдовательно, въ этихъ уравненіяхъ они ничѣмъ не отличаются одинъ отъ другого, приходимъ къ выводу, что если бы намъ и удалось, послѣ нѣкоторыхъ вычисленій, исключить всѣ корни, кромѣ a, то при помощи точно такихъ же вычисленій можно было бы исключить и всѣ корни, кромѣ, напр., b и этотъ второй результатъ отличался бы отъ перваго только

тѣмъ, что a измѣнено на b, а это значитъ, что такому уравненію должны удовлетворять и a, и b. Такъ какъ то же можно сказать и объ остальныхъ корняхъ, то корнями уравненія относительно a, полученнаго послѣ исключенія остальныхъ буквъ, очевидно, должны быть a, b, c, . . . ,k, l, и что, слѣдовательно (§ 177), это уравненіе не должно отличаться отъ заданнаго. Такое заключеніе, впрочемъ, весьма просто можетъ быть провѣрено. Въ самомъ дѣлѣ, вернемся къ уравненіямъ (3). Умножимъ первое изъ нихъ на a^{m-1}, второе — на a^{m-2}, третье — на a^{m-3}, . . . , предпослѣднее — на a, послѣднее — на 1 и сложимъ, въ результатѣ получимъ слѣдующее уравненіе:

$$A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\ldots+A_{m-1}a+A_m=-a^m,$$

отличающееся отъ заданнаго только тѣмъ, что x замѣнено буквою a.

§ 183. Замѣчаніе II. — На основаніи предыдущаго нельзя утверждать, что уравненія (3) никогда не могутъ привести къ рѣшенію алгебраическаго уравненія. Тамъ доказано только то, что этой цѣли нельзя достигнуть посредствомъ исключенія $(m-1)$ искомыхъ корней, потому что этотъ пріемъ приведетъ снова къ заданному уравненію; но придти къ рѣшенію даннаго алгебраическаго уравненія, исходя изъ тѣхъ же уравненій (3), все-таки иногда можно, пользуясь другими пріемами. Опредѣлимъ, напр., оба корня a и b уравненія второй степени:

$$x^2+A_1x+A_2=0.$$

Изъ соотношеній:

$$a+b=-A_1,\ ab=A_2$$

получимъ разность $(a-b)$, возведя первое изъ нихъ въ квадратъ и вычтя по-членно второе, предварительно умноживъ всѣ члены послѣдняго на 4:

$$(a+b)^2-4ab=A_1{}^2-4A_2,$$

или, что то же самое,

$$(a-b)^2=A_1{}^2-4A_2,$$

откуда

$$a-b=\pm\sqrt{A_1{}^2-4A_2}.$$

Зная же $(a+b)$ и $(a-b)$, легко найдемъ a и b.

VI. Теорема о корняхъ уравненія.

§ 184. Заканчивая эту главу, опредѣлимъ ближе тѣ слѣдствія, какія можно вывести (§ 170) изъ подстановки двухъ различныхъ чиселъ въ первую часть уравненія.

Теорема. — *Если два числа, α и β, подставленныя на мѣсто x въ первую часть алгебраическаго уравненія, $X=0$, даютъ результаты съ противоположными знаками, то между ними содержится нечетное число корней.*

Нужно, при этомъ, помнить, что кратные корни отсчитываются столько разъ, какъ велика степень ихъ кратности.

Пусть $a, b, \ldots, p$ будутъ корни, лежащіе между α и β, а Q — частное отъ дѣленія X на $(x-a)(x-b)\ldots(x-p)$. Пишемъ тождество:

$$X=(x-a)(x-b)\ldots(x-p)Q,$$

гдѣ Q обозначаетъ произведеніе множителей, соотвѣтствующихъ мнимымъ корнямъ и тѣмъ вещественнымъ, которые не содержатся между α и β. Полагая въ этомъ равенствѣ послѣдовательно $x=\alpha$, $x=\beta$, получаемъ.

$$X_\alpha=(\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-p)Q_\alpha,$$
$$X_\beta=(\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-p)Q_\beta;$$

здѣсь X_α, Q_α, X_β, Q_β обозначаютъ результаты подстановки въ многочлены. X и Q на мѣсто x значеній α и β. По предположенію, X_α и X_β — противоположныхъ знаковъ; слѣдовательно, то же нужно сказать и о вторыхъ частяхъ. Замѣчая же, что Q_α и Q_β - одного знака, потому что въ противномъ случаѣ уравненіе: $Q=0$ имѣло бы, по крайней мѣрѣ (§ 170), одинъ корень, лежащій между α и β, приходимъ къ выводу, что произведенія:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-p)\\(\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-p)\end{array}\right\}$$

имѣютъ противоположные знаки; и такъ какъ всѣ множители перваго изъ нихъ — отрицательны, а второго — положительны, то, очевидно, число этихъ множителей, а слѣдовательно, и число корней: $a, b, \ldots, p$ должно быть нечетнымъ.

Точно такъ же можно вывести, что *если оба числа дадутъ результаты съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, то между ними содержится четное число корней* (это число можетъ быть нулемъ).

КОНСПЕКТЪ.

§ 165. Общій видъ цѣлой функціи отъ x. — § 166. Всякая цѣлая и раціональная функція отъ перемѣнной x измѣняется непрерывно. — § 167. То же относится ко всякой функціи, производная отъ которой не обращается въ безконечность. — § 168. Можно всегда придать x достаточно большое значеніе, чтобы знакъ всей функціи совпалъ со знакомъ ея перваго члена.—§ 169. Знакъ функціи четной и нечетной степени, когда перемѣнная получаетъ большія, положительныя или отрицательныя, значенія. — § 170. Если $f(x)$ при двухъ значеніяхъ x, $x=a$ и $x=b$, пріобрѣтаетъ значенія, противоположныя по знаку, то уравненіе : $f(x)=0$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, лежащій между a и b. — § 171. Эта теорема справедлива для всякаго уравненія, первая часть котораго есть непрерывная функція отъ x. —§ 172. Всякое уравненіе нечетной степени имѣетъ всегда одинъ вещественный корень, противоположный по знаку его послѣднему члену.— § 173. Уравненіе четной степени, послѣдній членъ котораго—отрицательный, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, два корня: одинъ—положительный и другой—отрицательный. — § 174. Принимаютъ, что всякое уравненіе имѣетъ вещественный или мнимый корень. — § 175. Всякое уравненіе m-ой степени имѣетъ ровно m корней и первая его часть представляетъ произведеніе m множителей первой степени.—§ 176. Произведеніе мнимыхъ множителей равно нулю только тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю. — § 177. Два уравненія съ одними и тѣми же корнями могутъ различаться только постояннымъ множителемъ. — § 178. Два многочлена m-ой степени—тождественны, если они равны между собою при $(m+1)$ значеніяхъ перемѣнной.—§ 179. Опредѣленіе равныхъ корней.—§ 180. Если $(a+b\sqrt{-1})$ есть m-кратный корень уравненія съ вещественными коэффиціентами, то и $(a-b\sqrt{-1})$ будетъ также m-кратный корень того же уравненія.—§ 181. Выраженіе коэффиціентовъ уравненія черезъ корни. - § 182. Исходя изъ предыдущихъ соотношеній, нельзя притти, посредствомъ исключенія, къ рѣшенію даннаго уравненія. — § 183. Нельзя утверждать, что и посредствомъ какого-нибудь другого пріема эти соотношенія не могутъ привести къ нахожденію корней. — § 184. Если два числа, α и β, подставленныя въ $f(x)$, даютъ результаты съ противоположными знаками, то между ними содержится нечетное число корней; если же они даютъ результаты съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, то между ними содержится или четное число корней, или не содержится ихъ вовсе.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Найти maximum произведенія $x(p-x^2)$, когда x измѣняется отъ 0 до p.

Вывести отсюда условія, при которыхъ уравненіе:

$$x(p-x^2)=q$$

имѣло бы два положительныхъ корня.

Отв. Искомое условіе: $4p^3>27q^2$.

II. Найти условія, при которыхъ уравненіе

$$x^m-px^n+q=0$$

имѣло бы два положительныхъ корня.

Отв. Искомое условіе: $n^n(m-n)^{m-n}p^m>m^m q^{m-n}$.

III. Доказать, что уравненіе.

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{L}{x-l}=P$$

имѣетъ m вещественныхъ корней, если $a, b, \ldots, l$ обозначаютъ m различныхъ чиселъ.

Прилагается теорема § 170-го.

IV. Если уравненіе:

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+Dx^{m-4}-\ldots=0$$

имѣетъ всѣ корни вещественные, то непремѣнно

$$\begin{aligned}&A^2-2B>0,\\&B^2-2AC+2D>0,\\&C^2-2BD+2AE-2F>0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Чтобы доказать это, полагаютъ $y=x^2$ и замѣчаютъ, что послѣ приведенія уравненія къ раціональному виду относительно y коэффиціенты его должны быть по-перемѣнно то положительными, то отрицательными.

V. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть n корней уравненія:

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0,$$

то $(m-n)$ остальныхъ корней удовлетворяютъ уравненію:

$$x^{m-n}+(A_1+\Sigma\alpha_1)x^{m-n-1}+(A_2+A_1\Sigma\alpha_1+\Sigma\alpha_1\alpha_2)x^{m-n-2}+$$
$$+(A_3+A_2\Sigma\alpha_1+A_1\Sigma\alpha_1\alpha_2+\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x^{m-n-3}+\ldots=0,$$

здѣсь $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ обозначають соотвѣтственно сумму корней, сумму ихъ произведеній по два, сумму ихъ произведеній по три, и т. д., при чемъ считаются и тѣ произведенія, куда одинъ и тотъ же корень входитъ нѣсколько разъ.

Прилагается теорема § 181-го.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Теорема Декарта. — Теорема Ролля.

I. Теорема Декарта.

§ 185. Опредѣленіе.—Докажемъ теперь извѣстнѣйшую теорему, которая даетъ возможность, при одномъ взглядѣ на алгебраическое уравненіе, опредѣлить высшій предѣлъ числа возможныхъ для него положительныхъ корней.

Доказательство этой теоремы покоится на леммѣ, которую мы сначала и изложимъ.

Когда два послѣдовательныхъ члена какого-нибудь многочлена имѣютъ противоположные знаки, то говорятъ, что они представляютъ *перемѣну* знака; когда же они имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, то говорятъ, что они представляютъ *повтореніе* знака.

§ 186. Лемма.—*Если умножить на* $(x-\alpha)$ *раціональный и цѣлый многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы* x, *то коэффиціенты произведенія, начиная съ перваго, дадутъ, по крайней мѣрѣ, одною перемѣною знака болѣе, чѣмъ коэффиціенты множимаго* (α обозначаетъ положительное число).

Пусть $f(x)$ есть множимое. Чтобы на чемъ-нибудь остановиться, предположимъ, что его первый членъ имѣетъ положительный коэффиціентъ; разобьемъ члены этого многочлена на такія группы, чтобы въ каждой изъ нихъ всѣ коэффиціенты были бы съ однимъ и тѣмъ же знакомъ. Первая группа составится изъ перваго члена и всѣхъ положительныхъ членовъ, слѣдующихъ за нимъ безъ перерыва; вторая группа начнется съ перваго отрицательнаго члена, а затѣмъ въ нее войдутъ всѣ отрицательные члены, содержащіеся между этимъ послѣднимъ и первымъ положительнымъ, встрѣчающимся далѣе; этотъ положительный будетъ первымъ членомъ третьей группы,

и т. д; слѣдуетъ замѣтить, что любая изъ группъ можетъ состоять только изъ одного члена. Пишемъ первый членъ каждой группы:

$$\begin{aligned} Ax^m + + \ldots - Px^p - - \ldots + Qx^q + \ldots \\ - Rx^r - - \ldots + Ux^u + \ldots \pm V; \end{aligned} \qquad (1)$$

каждый изъ не написанныхъ членовъ—одного знака съ тѣмъ написаннымъ, который находится по лѣвую его сторону и съ котораго начинается группа, содержащая ихъ обоихъ. Необходимо помнить, что каждый изъ написанныхъ членовъ служитъ началомъ одной изъ группъ, исключая послѣдняго $\pm V$, заканчивающаго, напротивъ, ту группу, къ которой онъ принадлежитъ.

Умножимъ теперь написанный такимъ образомъ многочленъ на множитель $(x-\alpha)$ и въ произведеніи займемся составленіемъ только слѣдующихъ членовъ: x^{m+1}, x^{p+1}, x^{q+1}, x^{r+1}, . . . , x^{u+1} и послѣдняго $\pm V\alpha$. При этомъ мы тотчасъ увидимъ, что

коэффиціентъ при x^{m+1} — положителенъ,
коэффиціентъ при x^{p+1} — отрицателенъ,
коэффиціентъ при x^{q+1} — положителенъ,
. . . .
коэффиціентъ при x^{u+1} имѣетъ знакъ или $+$, или $-$, одинаковый со знакомъ при x^u во множимомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ произведеніи членъ съ x^{m+1} происходитъ отъ умноженія Ax^m на x;

членъ съ x^{p+1} составляется изъ произведенія $-Px^{p+1}$ члена $-Px^p$ на x и произведенія на $-\alpha$ члена, предшествующаго непосредственно члену $-Px^p$; а такъ какъ этотъ членъ, по нашему соглашенію, имѣетъ коэффиціентъ положительный, то его произведеніе на $-\alpha$ будетъ имѣть коэффиціентъ отрицательный, который, будучи сложенъ съ $-P$, коэффиціентомъ произведенія $-Px^{p+1}$, дастъ необходимо отрицательную сумму;

членъ съ x^{q+1} составляется изъ произведенія $+Qx^{q+1}$ члена $+Qx^q$ на x и произведенія на $-\alpha$ члена, предшествующаго непосредственно члену Qx^q; а такъ какъ этотъ членъ, по нашему соглашенію, имѣетъ коэффиціентъ отрицательный, то его произведеніе на $-\alpha$ будетъ имѣть коэффиціентъ положительный, который, будучи сложенъ съ $+Q$, коэффиціентомъ произведенія Qx^{q+1}, дастъ необходимо положительную сумму;

доказательство—такое же и для слѣдующихъ членовъ;

прибавимъ еще, что послѣдній членъ произведенія происходитъ, безъ всякаго приведенія подобныхъ членовъ, только отъ умноженія $\pm V$ на $-\alpha$ и поэтому будетъ имѣть знакъ $\mp$.

Итакъ, произведеніе можетъ быть написано въ видѣ:

$$Ax^{m+1}\ldots-P'x^{p+1}\ldots+Q'x^{q+1}\ldots-R'x^{r+1}\ldots\pm U'x^{u+1}\ldots\mp V\alpha, \quad (2)$$

гдѣ P', Q', R', U', ... обозначаютъ положительныя числа, а не написанные члены имѣютъ неопредѣленный знакъ:

Разсматривая это произведеніе (2), замѣчаемъ, что оно имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одною перемѣною знака болѣе, чѣмъ множимое (1). Дѣйствительно, отъ Ax^{m+1} до $-P'x^{p+1}$ мы имѣемъ, по крайней мѣрѣ, одну перемѣну, а въ соотвѣтственной части множимаго только одну; отъ $-P'x^{p+1}$ до $+Q'x^{q+1}$ мы имѣемъ, по крайней мѣрѣ, одну перемѣну, а въ соотвѣтственной части множимаго только одну. То же самое разсужденіе ведемъ до члена $\pm U'x^{u+1}$; не трудно видѣть, что до этого члена, въ произведеніи, по крайней мѣрѣ, столько перемѣнъ знака, сколько ихъ во всемъ множимомъ. Послѣ же члена $\pm U'x^{u+1}$ произведеніе дастъ, по крайней мѣрѣ, еще одну перемѣну, потому что этотъ членъ противоположенъ по знаку послѣднему члену $\mp V\alpha$. Слѣдовательно, въ произведеніи, по крайней мѣрѣ, одною перемѣною болѣе, чѣмъ во множимомъ, что̀ и требовалось доказать.

§ 187. Замѣчаніе. — Если первая група произведенія (2), отъ Ax^{m+1} до $-P'x^{p+1}$, даетъ болѣе одной перемѣны, то число этихъ перемѣнъ остается все-таки нечетнымъ, потому что крайніе ея члены — противоположны по знаку. Отсюда вытекаетъ, что число перемѣнъ, *введенныхъ* посредствомъ умноженія въ эту часть произведенія, — четное. То же относится къ числу перемѣнъ, введенныхъ въ каждую группу, исключая послѣдней, которая, не представляя ни одной перемѣны во множимомъ, дастъ ихъ въ произведеніи нечетное число. Слѣдовательно, *все число введенныхъ перемѣнъ — нечетное.*

§ 188. Высшій предѣлъ числа положительныхъ корней уравненія. — Предположимъ, что уравненіе:

$$\varphi(x)=0$$

алгебраическое и пусть $f(x)$ есть произведеніе простыхъ множителей, соотвѣтствующихъ отрицательнымъ и мнимымъ корнямъ

этого уравненія. Въ такомъ случаѣ, называя черезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ положительные корни, мы можемъ написать:

$$\varphi(x)=f(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots;$$

по предыдущей леммѣ произведеніе $f(x)(x-\alpha)$ дастъ, по крайней мѣрѣ, одною перемѣною болѣе, чѣмъ $f(x)$; произведеніе $f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$ дастъ, по крайней мѣрѣ, одною перемѣною болѣе, чѣмъ предыдущее, и слѣдовательно, двумя перемѣнами болѣе, чѣмъ $f(x)$; $f(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ дастъ, по крайней мѣрѣ, тремя болѣе, и т. д. Поэтому, когда всѣ члены $f(x)$—одного знака, то произведеніе $\varphi(x)$ будетъ имѣть, по крайней мѣрѣ, столько перемѣнъ, сколько въ немъ корней: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Когда всѣ корни $\varphi(x)=0$ положительны, то $f(x)$ предполагаемъ равнымъ 1; предыдущее заключеніе и въ этомъ случаѣ справедливо.

Итакъ, можно высказать слѣдующую теорему:

Алгебраическое уравненіе:

$$\varphi(x)=0,$$

первая часть котораго есть раціональная и цѣлая функція отъ x, не можетъ имѣть положительныхъ корней болѣе перемѣнъ знака между коэффиціентами $\varphi(x)$.

Эта теорема извѣстна подъ именемъ *правила знаковъ* Декарта.

§ 189. Высшій предѣлъ числа отрицательныхъ корней.—Пусть

$$\varphi(x)=0 \tag{1}$$

будетъ алгебраическое уравненіе. Если $-\alpha$ обозначаетъ отрицательный корень этого уравненія, то

$$\varphi(-\alpha)=0$$

и, слѣдовательно, $x=+\alpha$ есть корень уравненія

$$\varphi(-x)=0, \tag{2}$$

получающагося изъ даннаго посредствомъ замѣны въ послѣднемъ x на $-x$. Отсюда вытекаетъ, что отрицательные корни уравненія (1) служатъ положительными корнями уравненія (2); примѣняя, теперь, къ уравненію (2) теорему Декарта, получимъ высшій предѣлъ числа отрицательныхъ корней даннаго уравненія. Итакъ, *уравненіе не можетъ имѣть отрицательныхъ корней болѣе числа перемѣнъ знака*

въ первой части преобразованнаго уравненія (посредствомъ замѣны x на $-x$).

§ **190. Замѣчаніе**—Теорема Декарта даетъ высшій предѣлъ числа положительныхъ или отрицательныхъ корней, возможныхъ для даннаго уравненія. Но часто случается, что этотъ предѣлъ слишкомъ великъ и что, напр., число положительныхъ корней меньше числа перемѣнъ знака въ первой части.

Одно только можно доказать, что *если оба эти числа различны, то ихъ разность всегда число четное.*

Другими словами, *если уравненіе имѣетъ четное число перемѣнъ знака, то оно также имѣетъ четное число положительныхъ корней; а если оно имѣетъ нечетное число перемѣнъ знака, то оно имѣетъ нечетное же число положительныхъ корней.*

Для доказательства замѣтимъ, что въ уравненіи, имѣющемъ четное число перемѣнъ, послѣдній членъ, очевидно, положительный; слѣдовательно, полагая $x=0$ и $x=\infty$, получимъ результаты, одинаковые по знаку; поэтому число положительныхъ корней—четное (§ 184). Если же число перемѣнъ—нечетное, то послѣдній членъ—отрицательный; въ этомъ случаѣ $x=0$, подставленное въ первую часть, дастъ отрицательный результатъ, а $x=\infty$ дастъ всегда (§ 168) положительный результатъ; отсюда заключаемъ (§ 184), что между 0 и ∞ содержится нечетное число положительныхъ корней.

§ **191. Низшій предѣлъ числа мнимыхъ корней.**—Часто посредствомъ правила Декарта можно узнать, существуютъ ли мнимые корни въ данномъ уравненіи. Въ самомъ дѣлѣ, если возможное число положительныхъ корней, сложенное съ возможнымъ числомъ отрицательныхъ, даетъ сумму, меньшую степени уравненія, то непремѣнно есть мнимые корни.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$x^8+5x^3+2x-1=0;$$

первая его часть имѣетъ только одну перемѣну знака и потому оно можетъ имѣть положительный корень только одинъ. Измѣняемъ x на $-x$:

$$x^8-5x^3-2x-1=0;$$

первая часть этого измѣненнаго уравненія имѣетъ также одну перемѣну знака и потому оно можетъ имѣть положительный корень только одинъ. Итакъ, наше уравненіе можетъ имѣть только два

вещественныхъ корня и, слѣдовательно, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, шесть мнимыхъ корней.

Кромѣ того, въ данномъ случаѣ очевидно, что оба вещественныхъ корня, на которые правило Декарта указываетъ, какъ на возможные, существуютъ навѣрное; въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи только одна перемѣна знака, то избытокъ числа перемѣнъ надъ числомъ положительныхъ корней, представляя четное число (§ 190), долженъ быть равенъ нулю.

II. Теорема Ролля.

§ 192. Теорема.—*Между двумя послѣдовательными вещественными корнями, a и b, уравненія: $\varphi(x)=0$ содержится, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень его производной: $\varphi'(x)=0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, когда x измѣняется отъ a до b, $\varphi(x)$, начиная съ нуля и пройдя нѣкоторый рядъ значеній, снова возвращается къ нулю; а такъ какъ эта функція — непрерывна, то она идетъ, или сначала увеличиваясь, а потомъ уменьшаясь, или же наоборотъ: сначала уменьшаясь, а потомъ увеличиваясь. Въ обоихъ случаяхъ производная мѣняетъ знакъ и, слѣдовательно, въ силу непрерывности, проходитъ черезъ нуль для одного изъ значеній x между a и b, что и требовалось доказать.

Такъ какъ функція въ промежуткѣ отъ a до b можетъ нѣсколько разъ подвергнуться по-перемѣнно возрастанію и убыванію, то производная можетъ нѣсколько разъ обратиться въ нуль въ такомъ промежуткѣ. *Итакъ, можетъ быть нѣсколько корней у производной, содержащихся между двумя послѣдовательными корнями даннаго уравненія.*

Эта теорема справедлива для всякаго уравненія, первая часть котораго есть непрерывная функція отъ x, если ея производная тоже непрерывна.

§ 193. Слѣдствіе.—Отсюда вытекаетъ, что *между двумя послѣдовательными корнями производной можетъ не содержаться ни одного корня даннаго уравненія, но если содержится, то не болѣе одного.* Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны, видно, что если между двумя послѣдовательными корнями, a и b, даннаго уравненія, содержится нѣсколько корней: a', b', . . . производной, то эти корни a', b', . . . производной не содержатъ ни одного корня даннаго уравненія; съ

другой же стороны, видно, что если между двумя послѣдовательными корнями, a', b', производной заключается нѣсколько корней: a, b, ... даннаго уравненія, то эти корни послѣдняго уравненія не содержали бы корней его производной, а это—невозможно.

§ 194. Число вещественныхъ корней уравненія. — Изъ предыдущаго заключаемъ, что *если мы умѣемъ найти корни производной, то можемъ сосчитать число вещественныхъ корней даннаго уравненія.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть a', b', c', . . . , l' обозначаютъ вещественные корни производной, размѣщенные въ возрастающемъ или убывающемъ порядкѣ. Подставляемъ послѣдовательно на мѣсто x въ первой части даннаго уравненія числа:

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\ \ldots,\ l',\ +\infty.$$

Если двѣ послѣдовательныя подстановки даютъ результаты съ противоположными знаками, то въ соотвѣтственномъ промежуткѣ находится, по крайней мѣрѣ, одинъ корень даннаго уравненія (§ 170) и только одинъ (§ 193). Если результаты — одного знака, то въ этомъ промежуткѣ нѣтъ ни одного корня даннаго уравненія, потому что въ противномъ случаѣ тамъ не могло бы быть болѣе одного (§ 193), а это—невозможно. Такимъ образомъ каждое измѣненіе знака при послѣдовательныхъ подстановкахъ обнаружитъ существованіе одного вещественнаго корня даннаго уравненія.

Если обозначить черезъ n число вещественныхъ корней производной, то $(n+1)$ будетъ число промежутковъ и, слѣдовательно, $(n+1)$ будетъ высшимъ предѣломъ числа вещественныхъ корней даннаго уравненія.

Еще видно, что если уравненіе имѣетъ всѣ корни вещественные, то его производная имѣетъ также всѣ корни вещественные, дѣйствительно, m вещественныхъ корней заданнаго уравненія даютъ $(m-1)$ промежутковъ, въ каждомъ изъ которыхъ долженъ находиться, по крайней мѣрѣ, одинъ корень производной, имѣющей только $m-1$ корней. Обратное заключеніе—несправедливо.

§ 195. Приложеніе къ уравненію третьей степени. — Въ частномъ случаѣ, разсматривая уравненіе третьей степени въ его простомъ видѣ:

$$x^3+px+q=0,$$

замѣчаемъ, что, чтобы оно имѣло всѣ три корня вещественные,

необходимо прежде всего, чтобы его производная, $3x^2+p=0$, имѣла оба корня вещественные, потому что, если бы послѣдніе были мнимыми, то данное уравненіе не могло бы имѣть (§ 193) болѣе одного вещественнаго корня. Слѣдовательно, p должно быть отрицательнымъ и корни производной будутъ тогда:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Сверхъ того необходимо, чтобы при послѣдовательной подстановкѣ на мѣсто x въ первую часть даннаго уравненія значеній:

$$-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty$$

каждый разъ происходило бы измѣненіе знака (§ 194). Далѣе, такъ какъ подстановка значенія $-\infty$ дѣлаетъ первую часть отрицательною, а подстановка $+\infty$ дѣлаетъ ее положительною, то необходимо и достаточно, чтобы получался знакъ $+$ при подстановкѣ меньшаго корня производной и знакъ $-$ при подстановкѣ бо́льшаго корня. Представляя первую часть: x^3+px+q подъ видомъ: $x(x^2+p)+q$, мы можемъ выразить необходимыя и достаточныя условія слѣдующими неравенствами:

$$\left.\begin{aligned}-\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3}+p\right)+q>0,\\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3}+p\right)+q<0\end{aligned}\right\},\ \text{или}\ \left\{\begin{aligned}-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0,\\ \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0.\end{aligned}\right.$$

Различимъ здѣсь два случая: 1) q — положительно; тогда, такъ какъ p — отрицательно, первое неравенство непремѣнно удовлетворится; что касается второго, то можно написать:

$$q<-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}};$$

замѣчая же, что обѣ части этого неравенства — положительны, мы можемъ возвысить ихъ въ квадратъ (I, § 204):

$$q^2<-\frac{4p^3}{27},\ \text{или}\ \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0;$$

2) q — отрицательно; второе неравенство въ этомъ случаѣ

непремѣнно удовлетворится; что касается перваго, то можно написать:

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -q;$$

замѣчая, что обѣ части этого неравенства — положительны, возвышаемъ ихъ въ квадратъ:

$$-\frac{4p^3}{27} > q^2, \text{ или } \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0. \qquad (1)$$

Итакъ, неравенство (1) есть необходимое и достаточное условіе, чтобы уравненіе третьей степени имѣло всѣ три корня вещественные. (Это условіе, очевидно, содержитъ первое $p < 0$).

КОНСПЕКТЪ.

§ 185. Опредѣленія: что такое перемѣна знака и что такое повтореніе знака. — **§ 186.** Если умножить многочленъ, цѣлый относительно x, на $(x - a)$, гдѣ a положительно, то произведеніе дастъ, по крайней мѣрѣ, одною перемѣною знака болѣе, чѣмъ множимое. — **§ 187.** Число введенныхъ перемѣнъ — нечетное. — **§ 188.** Число положительныхъ корней уравненія не можетъ превышать числа перемѣнъ знака въ его первой части. — **§ 189.** Высшій предѣлъ числа отрицательныхъ корней. — **§ 190.** Избытокъ числа перемѣнъ знака надъ числомъ положительныхъ корней есть число четное. — **§ 191.** Низшій предѣлъ числа мнимыхъ корней. — **§ 192.** Между двумя послѣдовательными вещественными корнями уравненія содержится, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень его производной. — **§ 193.** Между двумя послѣдовательными вещественными корнями производной можетъ не содержаться ни одного корня даннаго уравненія, но если содержится, то не болѣе одного. — **§ 194.** Если мы умѣемъ найти корни производной, то можемъ сосчитать вещественные корни даннаго уравненія. Чтобы уравненіе имѣло всѣ корни вещественные, необходимо, чтобы его производная имѣла также всѣ корни вещественные; но это условіе не есть достаточное. — **§ 195.** Условіе, чтобы уравненіе третьей степени имѣло всѣ три корня вещественные.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Когда алгебраическое уравненіе степени m, съ вещественными коэффиціентами, — полное, т.-е. когда его первая часть содержитъ всѣ степени x, начиная со степени m и кончая степенью 0, то, если всѣ его корни — вещественные, число положительныхъ корней равно числу перемѣнъ знака, а число отрицательныхъ корней равно числу повтореній знака.

II. Если неполное уравненіе степени m содержитъ n членовъ, то число

вещественныхъ корней не можетъ быть болѣе $(2n-2)$ при m четномъ и болѣе $(2n-3)$ при m нечетномъ.

Для этихъ двухъ упражнений пользуются теоремами §§ 188-го и 189-го.

III. Если въ неполномъ уравненіи между двумя членами съ однимъ и тѣмъ же или съ противоположными знаками недостаетъ четнаго числа членовъ, то уравненіе имѣетъ, по крайней мѣрѣ, столько мнимыхъ корней, сколько недостаетъ членовъ.

IV. Если въ неполномъ уравненіи между двумя членами съ однимъ и тѣмъ же знакомъ недостаетъ нечетнаго числа членовъ, то уравненіе имѣетъ мнимыхъ корней, по крайней мѣрѣ, столько, сколько недостающихъ членовъ плюсъ одинъ. Если же два члена, между которыми недостаетъ нѣкотораго числа членовъ, —съ противоположными знаками, то уравненіе имѣетъ мнимыхъ корней, по крайней мѣрѣ, столько, сколько недостающихъ членовъ безъ одного.

V. Когда неполное уравненіе имѣетъ всѣ корни вещественные, то между двумя членами съ однимъ и тѣмъ же знакомъ не можетъ быть пропуска; между же двумя членами съ различными знаками не можетъ быть пропущено болѣе одного члена.

VI. Когда неполное уравненіе имѣетъ всѣ корни вещественные, то число положительныхъ корней равно числу перемѣнъ знака, а число отрицательныхъ корней равно числу повтореній знака, увеличенному на число пропусковъ, т.-е. на число тѣхъ промежутковъ, гдѣ не достаетъ членовъ уравненія.

Къ упражненіямъ III, IV, V и VI прилагаются теоремы §§ 188-го, 189-го и 191-го.

VII. Между двумя послѣдовательными корнями уравненія содержится всегда нечетное число корней его производной, при чемъ каждый двойной корень, который можетъ имѣть производная, считается за два корня, каждый тройной ея корень—за три корня, и т. д.

Изслѣдуются измѣненія первой части уравненія (§ 192)

VIII. Если члены уравненія:

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

умножить соотвѣтственно на a, $a+b$, $a+2b, \ldots, a+(m-1)b$, $a+mb$, при чемъ a и b обозначаютъ положительныя числа, то составится новое уравненіе, имѣющее по одному корню между каждыми двумя послѣдовательными корнями даннаго уравненія, исключая промежутка между наименьшимъ положительнымъ корнемъ и предшествующимъ отрицательнымъ.

Прилагается предыдущая теорема (VII).

IX. Если въ уравненіи $f(x)=0$ измѣнить x на $-x$, то число перемѣнъ знака, и въ данномъ, и въ преобразованномъ уравненіи не можетъ быть выше степени уравненія; и если ниже, то разность — число четное.

Изслѣдуютъ, какъ пропускъ нѣкоторыхъ членовъ въ уравненіи вліяетъ на число перемѣнъ знака.

X. Если уравненіе степени m представляетъ v перемѣнъ знака, то оно имѣетъ, самое большее, $(m-v)$ отрицательныхъ корней.

Слѣдствіе изъ теоремы IX.

XI. Если при умноженіи первой части уравненія на $(x-\alpha)$ будетъ введено $(2v+1)$ перемѣнъ знака, то данное уравненіе имѣетъ, по крайней мѣрѣ, $2v$ мнимыхъ корней.

Прилагаются теоремы: X и § 191-го

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Теорія равныхъ корней.

I. Общіе множители двухъ многочленовъ.

196. Опредѣленіе общаго наибольшаго алгебраическаго дѣлителя. — Мы видѣли (§ 175), что цѣлая функція отъ перемѣнной x всегда можетъ быть разложена на множителей первой степени вида $(x-\alpha)$, при чемъ α обозначаетъ или вещественное число, или мнимое выраженіе, не зависящее отъ x. Разложеніе можетъ быть только одно и въ каждомъ многочленѣ число такихъ множителей непремѣнно равно его степени. Вообще, два различныхъ многочлена имѣютъ неравныхъ множителей и только въ частныхъ случаяхъ они будутъ имѣть одного или нѣсколькихъ общихъ множителей. При нѣкоторыхъ алгебраическихъ разысканіяхъ важно умѣть опредѣлять, будутъ ли два данныхъ многочлена имѣть общихъ множителей, и если будутъ, то чему равно произведеніе всѣхъ ихъ общихъ множителей; послѣднее называется *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ* двухъ многочленовъ.

§ 197. Разысканіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ многочленовъ. — Пусть $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ будутъ два многочлена, расположенные по убывающимъ степенямъ x. Предположимъ, что степень $\varphi(x)$ выше степени $\varphi_1(x)$, и раздѣлимъ первый изъ этихъ многочленовъ на второй. Назовемъ частное черезъ Q и остатокъ черезъ $\varphi_2(x)$; тогда

$$\varphi(x) = Q\varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Это равенство показываетъ, что произведеніе общихъ множителей для $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ есть въ то же время произведеніе общихъ множителей для $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $(x-\alpha)$ есть общій множитель для $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, входящій въ каждый изъ этихъ

двухъ многочленовъ по p разъ; иначе говоря, $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ дѣлятся на $(x-\alpha)^p$, откуда очевидно, что сумма и одно изъ слагаемыхъ $Q\varphi_1(x)$ также дѣлятся на этого дѣлителя; слѣдовательно, на того же дѣлителя должно дѣлиться и второе слагаемое $\varphi_2(x)$. Также покажемъ, что если $(x-\alpha)$ входитъ p разъ множителемъ въ $\varphi_2(x)$ и въ $\varphi_1(x)$, то оно войдетъ p разъ множителемъ и въ $\varphi(x)$. Число p можетъ равняться 1.

Итакъ, общіе множители для $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ совпадаютъ съ общими множителями для $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и въ обоихъ случаяхъ должны быть взяты съ одними и тѣми же показателями; это значитъ, что общій наибольшій дѣлитель $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ есть въ то же время общій наибольшій дѣлитель $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Точно такъ же разысканіе общаго наибольшаго дѣлителя $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ приведетъ насъ къ разысканію общаго наибольшаго дѣлителя между $\varphi_2(x)$ и остаткомъ $\varphi_3(x)$ отъ дѣленія φ_1 на φ_2; такимъ образомъ продолжаемъ замѣнять данные многочлены другими, степень которыхъ непрерывно уменьшается; наконецъ, *когда дойдемъ до такого дѣленія, которое выполняется точно, то послѣдній дѣлитель и будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.*

Если у насъ получится численный остатокъ раньше ожидаемаго точнаго дѣленія, то данные многочлены не имѣютъ никакого общаго множителя, а слѣдовательно, не имѣютъ и общаго наибольшаго дѣлителя.

§ 198. Замѣчаніе. — При разысканіи произведенія общихъ множителей двухъ многочленовъ не обращается никакого вниманія на численные множители. Поэтому, можно умножить одинъ изъ данныхъ многочленовъ или какой-нибудь изъ полученныхъ остатковъ на какой-угодно численный множитель. Этимъ замѣчаніемъ часто пользуются, чтобы избѣжать введенія численныхъ знаменателей. Для этого достаточно умножить послѣдовательныя дѣлимыя на коэффиціентъ перваго члена соотвѣтственнаго дѣлителя; этого правила нужно держаться не только для послѣдовательныхъ функцій: $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, служащихъ послѣдовательными дѣлителями, но также и для частныхъ дѣлимыхъ, которыя могутъ появиться при каждомъ дѣленіи.

Предположимъ, напр., что при дѣленіи $\varphi(x)$ на $\varphi_1(x)$ мы нашли въ частномъ нѣкоторое число членовъ, совокупность которыхъ назовемъ черезъ Q_1. Пусть, кромѣ того, $\psi(x)$ обозначаетъ остатокъ отъ дѣлимаго, послѣ того какъ мы вычли произведеніе Q_1 на дѣлителя.

Въ такомъ случаѣ

$$\varphi(x) = Q_1\varphi_1(x) + \psi(x);$$

изъ этого равенства такъ же, какъ и въ § 197-мъ, мы заключаемъ, что общіе множители для $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ будутъ совпадать съ общими множителями для $\psi(x)$ и $\varphi_1(x)$ и, слѣдовательно, съ общими множителями $k\psi(x)$ и $\varphi_1(x)$, гдѣ k обозначаетъ какую-нибудь постоянную. Итакъ, можно продолжать дѣйствія для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя, умноживъ предварительно частное дѣлимое $\psi(x)$ на нѣкоторый численный множитель k.

Также можно раздѣлить одинъ изъ многочленовъ или какой-нибудь изъ остатковъ на численный множитель, общій для всѣхъ членовъ.

§ 199. Примѣръ I. — Пусть требуется отыскать произведеніе общихъ множителей для слѣдующихъ двухъ многочленовъ:

$$\left.\begin{array}{l} x^7 - 3x^6 + x^5 - 4x^2 + 12x - 4, \\ 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1. \end{array}\right\}$$

Вотъ таблица дѣйствій:

$$\varphi(x) = x^7 - 3x^6 + x^5 - 4x^2 + 12x - 4,$$
$$\varphi_1(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

Первое частное дѣйствіе.

Произв. дѣл-аго на 2 ... $2x^7 - 6x^6 + 2x^5 - 8x^2 + 24x - 8 \mid 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

$2x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 3x^4 + x^3 \qquad\qquad x^3 - x$

$- x^5 + 3x^4 - x^3 - 8x^2 + 24x - 8$

Произ. остатка на 2 ...... $-2x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 48x - 16$

$-2x^5 + 6x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

$x^3 - 19x^2 + 49x - 16$

Второе частное дѣйствіе.

$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \mid x^3 - 19x^2 + 49x - 16$

$2x^4 - 38x^3 + 98x^2 - 32x \qquad\qquad 2x + 32$

$32x^3 - 95x^2 + 29x + 1$

$32x^3 - 608x^2 + 1568x - 512$

$513x^2 - 1539x + 513$

Частное отъ дѣленія остатка на 513 .... $x^2 - 3x + 1$

Третье частное дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l} x^3-19x^2+49x-16 & x^2-3x+1 \\ \underline{x^3-3x^2+x} & \overline{x-16} \\ -16x^2+48x-16 & \\ -16x^2+48x-16 & \end{array}$$

Итакъ, произведеніе общихъ множителей есть (x^2-3x+1) и мы можемъ написать:

$$\varphi(x)=(x^2-3x+1)(x^5-4),$$
$$\varphi_1(x)=(x^2-3x+1)(2x^2+1).$$

Въ предыдущихъ дѣйствіяхъ многочленъ $\varphi(x)$ и первый остатокъ при первомъ дѣленіи были умножены на 2; остатокъ же отъ второго дѣленія былъ раздѣленъ на 513. Такое введеніе и опусканіе численныхъ множителей, какъ замѣчено выше, не вліяетъ на искомый результатъ, хотя отъ этого и измѣняются послѣдовательно получаемыя частныя. Такъ, напр., при дѣленіи $\varphi(x)$ на $\varphi_1(x)$ безъ этихъ упрощеній въ частномъ мы получили бы $\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)$ вмѣсто полученнаго (x^3-x); но такъ какъ частныя не играютъ никакой роли, то такое измѣненіе ихъ не представляетъ никакихъ неудобствъ.

Примѣръ II.—Разсмотримъ еще слѣдующихъ два многочлена:

$$\begin{cases} \varphi(x)=x^6-49x^4+67x^3+10x^2-25x-4, \\ \varphi_1(x)=2x^5-18x^4+39x^3-25x^2+x+1. \end{cases}$$

Вотъ таблица дѣйствій:

$$\begin{array}{r|l} 2x^6-98x^4+134x^3+20x^2-50x-8 & 2x^5-18x^4+39x^3-25x^2+x+1 \\ \underline{2x^6-18x^5+39x^4-25x^3+x^2+x} & \overline{x+9} \\ 18x^5-137x^4+159x^3+19x^2-51x-8 & \\ \underline{18x^5-162x^4+351x^3-225x^2+9x+9} & \\ 25x^4-192x^3+244x^2-60x-17 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 50x^5-450x^4+975x^3-625x^2+25x+25 & 25x^4-192x^3+244x^2-60x-17 \\ \underline{50x^5-384x^4+488x^3-120x^2-34x} & \overline{2x-66} \\ \underline{-66x^4+487x^3-505x^2+59x+25} & \\ -1650x^4+12175x^3-12625x^2+1475x+625 & \\ \underline{-1650x^4+12672x^3-16104x^2+3960x+1122} & \\ \underline{-497x^3+3479x^2-2485x-497} & \\ -x^3+7x^2-5x-1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
25x^4 - 192x^3 + 244x^2 - 60x - 17 & x^3 - 7x^2 + 5x + 1 \\ \cline{2-2}
25x^4 - 175x^3 + 125x^2 + 25x & 25x - 17 \\ \cline{1-1}
-17x^3 + 119x^2 - 85x - 17 & \\
-17x^3 + 119x^2 - 85x - 17 &
\end{array}$$

Итакъ, произведеніе общихъ множителей есть $(x^3 - 7x^2 + 5x + 1)$; раздѣливъ на него оба многочлена: $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, мы можемъ послѣдніе представить въ видѣ слѣдующихъ произведеній:

$$\varphi(x) = (x^3 - 7x^2 + 5x + 1)(x^3 + 7x^2 - 5x - 4),$$
$$\varphi_1(x) = (x^3 - 7x^2 + 5x + 1)(2x^2 - 4x + 1).$$

Замѣтимъ, что и въ этомъ примѣрѣ были сдѣланы различныя упрощенія при послѣдовательныхъ дѣленіяхъ. При первомъ изъ нихъ дѣлимое было умножено на 2, при второмъ были умножены на 25 два дѣлимыхъ: главное и первое частное, остатокъ же былъ раздѣленъ на 497.

Примѣръ III.—Отыщемъ общій наибольшій дѣлитель еще такихъ многочленовъ:

$$\begin{cases} \varphi(x) = x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16, \\ \varphi_1(x) = 6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48. \end{cases}$$

Вотъ таблица дѣйствій:

$$\begin{array}{r|l}
6x^6 - 42x^5 + 90x^4 - 240x^2 + 288x - 96 & 6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48 \\ \cline{2-2}
6x^6 - 35x^5 + 60x^4 - 80x^2 + 48x & x - 7 \\ \cline{1-1}
-7x^5 + 30x^4 - 160x^2 + 240x - 96 & \\ \cline{1-1}
-42x^5 + 180x^4 - 960x^2 + 1440x - 576 & \\
-42x^5 + 245x^4 - 420x^3 + 560x - 336 & \\ \cline{1-1}
-65x^4 + 420x^3 - 960x^2 + 880x - 240 & \\ \cline{1-1}
-13x^4 + 84x^3 - 192x^2 + 176x - 48 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
78x^5 - 455x^4 + 780x^3 - 1040x + 624 & 13x^4 - 84x^3 + 192x^2 - 176x + 48 \\ \cline{2-2}
78x^5 - 504x^4 + 1152x^3 - 1056x^2 + 288x & 6x + 49 \\ \cline{1-1}
+49x^4 - 372x^3 + 1056x^2 - 1328x + 624 & \\ \cline{1-1}
637x^4 - 4836x^3 + 13728x^2 - 17264x + 8112 & \\
637x^4 - 4116x^3 + 9408x^2 - 8624x + 2352 & \\ \cline{1-1}
-720x^3 + 4320x^2 - 8640x + 5760 & \\ \cline{1-1}
-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
13x^4 - 84x^3 + 192x^2 - 176x + 48 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ \cline{2-2}
13x^4 - 78x^3 + 156x^2 - 104x & 13x - 6 \\ \cline{1-1}
-6x^3 + 36x^2 - 72x + 48 & \\
-6x^3 + 36x^2 - 72x + 48 &
\end{array}$$

Итакъ, общій множитель есть $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$.

При послѣдовательныхъ дѣленіяхъ въ этомъ примѣрѣ, какъ и въ предыдущихъ, введены и опущены нѣкоторые численные множители, замѣтить которые теперь уже не трудно.

II. Общіе корни двухъ уравненій.

§ 200. Способъ находить общіе корни двухъ уравненій.—Предыдущая теорія даетъ возможность свести разысканіе общихъ корней двухъ уравненій на рѣшеніе одного уравненія, содержащаго только эти корни и потому степени низшей, чѣмъ данныя уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что *произведеніе общихъ множителей двухъ многочленовъ, будучи приравнено нулю, дастъ точно только тѣ корни, которые обращаютъ въ нуль оба уравненія заразъ.*

Пусть, напр., намъ даны уравненія:

$$x^6 - 49x^4 + 67x^3 + 10x^2 - 25x - 4 = 0,$$
$$2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1 = 0.$$

Мы видѣли (§ **199**, примѣръ II), что произведеніе множителей, общихъ для первыхъ частей этихъ уравненій, есть

$$x^3 - 7x^2 + 5x + 1$$

и, слѣдовательно, общіе корни будутъ корнями уравненія третьей степени:

$$x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Послѣднее уравненіе, очевидно, имѣетъ корень $x = 1$; поэтому его первая часть дѣлится на $(x - 1)$. Частное, $x^2 - 6x - 1$, будучи приравнено нулю, дастъ два другихъ общихъ корня: $x = 3 \pm \sqrt{10}$.

III. Равные корни.

§ 201. Цѣль теоріи равныхъ корней.—Пріемы для рѣшенія численныхъ уравненій требуютъ, чтобы эти уравненія не имѣли равныхъ корней. Поэтому необходимо рѣшить слѣдующихъ два вопроса:

1) Узнать, будетъ ли данное алгебраическое уравненіе имѣть равные корни.

2) Рѣшеніе уравненія съ равными корнями свести на рѣшеніе нѣсколькихъ другихъ уравненій, низшей степени, съ неравными корнями.

§ 202. Способъ узнавать, будетъ ли уравненіе имѣть равные корни.— Говорятъ, что уравненіе: $\varphi(x)=0$ имѣетъ n-кратный корень a, когда $\varphi(x)$ дѣлится на $(x-a)^n$. Слѣдующая теорема выражаетъ необходимыя и достаточныя для этого условія.

Теорема I.— *Чтобы число a было n-кратнымъ корнемъ алгебраическаго уравненія: $\varphi(x)=0$, необходимо и достаточно, чтобы оно, будучи подставлено на мѣсто x, обращало бы функцію $\varphi(x)$ и ея $(n-1)$ первыхъ производныхъ въ нуль.*

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ написать тождество:

$$x=a+(x-a)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi(x)=\varphi[a+(x-a)];$$

развертывая же $\varphi[a+(x-a)]$ по общей формулѣ, данной въ **§ 110**-мъ, получаемъ:

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\frac{\varphi'(a)}{1}(x-a)+\frac{\varphi''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots+\frac{\varphi^n(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n+$$
$$+\ldots+\frac{\varphi^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^m.$$

При одномъ взглядѣ на эту формулу видно, что высказанное въ теоремѣ условіе — достаточно. Дѣйствительно, если $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=0,\ldots,\varphi^{n-1}(a)=0$, то остаются во второй части только такіе члены, которые содержатъ множителемъ $(x-a)^n$; слѣдовательно, $\varphi(x)$ дѣлится на $(x-a)^n$.

Кромѣ того, это условіе — необходимо; въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что $\varphi(x)$ дѣлится на $(x-a)^n$, что $\varphi^p(x)$ есть первая изъ производныхъ отъ $\varphi(x)$, не обращающаяся въ нуль при $x=a$, и что $p<n$; предыдущее равенство приметъ слѣдующій видъ:

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^p(a)}{1.2\ldots p}(x-a)^p+\frac{\varphi^{p+1}(a)}{1.2\ldots(p+1)}(x-a)^{p+1}+\ldots+$$
$$+\frac{\varphi^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^m.$$

Если теперь обѣ части раздѣлить на $(x-a)^p$, то получится невозможное равенство:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\frac{\varphi^p(a)}{1.2\ldots p}+\frac{\varphi^{p+1}(a)}{1.2\ldots(p+1)}(x-a)+\ldots+\frac{\varphi^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^{m-p};$$

дѣйствительно, по предположенію, $\varphi(x)$ имѣетъ множителемъ $(x-a)^n$ и такъ какъ $n>p$, то первая часть обращается въ нуль при $x=a$, вторая же часть получаетъ значеніе, отличное отъ нуля, именно $\frac{\varphi^p(a)}{1.2\ldots p}$.

Изъ только-что доказанной теоремы можно вывести слѣдующія условія:

§ 203. Теорема II. — *Чтобы число a было n-кратнымъ корнемъ алгебраическаго уравненія: $\varphi(x)=0$, необходимо и достаточно, чтобы оно, будучи подставлено на мѣсто x, обращало бы многочленъ $\varphi(x)$ въ нуль и чтобы, сверхъ того, оно было $(n-1)$-кратнымъ корнемъ производнаго уравненія: $\varphi'(x)=0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, что необходимыя и достаточныя условія выражаются уравненіями:

$$\varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=0,\ \ldots,\ \varphi^{n-1}(a)=0,$$

изъ нихъ $(n-1)$ послѣднихъ показываютъ, что a есть корень уравненій: $\varphi'(x)=0$ и $(n-2)$ первыхъ производныхъ отъ него; слѣдовательно, по той же теоремѣ a есть $(n-1)$-кратный корень уравненія: $\varphi'(x)=0$.

§ 204. Замѣчаніе.—Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, что если разложить первую часть уравненія и ея производной на простыхъ множителей, соотвѣтствующихъ ихъ различнымъ корнямъ, то каждому кратному корню a, входящему n разъ въ уравненіе, будутъ соотвѣтствовать въ производной $(n-1)$ множителей, равныхъ $(x-a)$; иначе говоря, если уравненіе: $\varphi(x)=0$ имѣетъ n корней, равныхъ a, p корней, равныхъ b, q корней, равныхъ c, r корней, равныхъ d, и т. д., то

$$\varphi(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q(x-d)^r\ldots,$$
$$\varphi'(x)=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}(x-d)^{r-1}\ldots$$

и, слѣдовательно, $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ имѣютъ общими множителями: $(x-a)^{n-1}$, $(x-b)^{p-1}$, $(x-c)^{q-1}$, $(x-d)^{r-1}$, . . Другихъ общихъ множителей $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ имѣть не могутъ, потому что если бы у нихъ

былъ еще какой-нибудь общій множитель: $(x-k)$, то k было бы корнемъ для $\varphi(x)$ и для $\varphi'(x)$, а это значитъ, что k было бы двойнымъ корнемъ $\varphi(x)$ (§ 202). Изъ сказаннаго заключаемъ, что

общій наибольшій дѣлитель первой части уравненія и ея производной есть произведеніе простыхъ множителей, соотвѣтствующихъ кратнымъ корнямъ, въ степеняхъ на единицу ниже ихъ кратности.

Чтобы рѣшить, будетъ ли уравненіе имѣть равные корни, ищутъ общій наибольшій дѣлитель между его первою частью и ея производною. Если общаго наибольшаго дѣлителя нѣтъ, то, значитъ, нѣтъ и равныхъ корней.

§ 205 Приведеніе уравненія съ равными корнями. — Предыдущія теоремы даютъ возможность свести рѣшеніе уравненія съ равными корнями на рѣшеніе нѣсколькихъ другихъ уравненій, не имѣющихъ равныхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ уравненіе: $\varphi(x)=0$. Пусть его первая часть будетъ разложена на множителей, соотвѣтствующихъ его корнямъ, и пусть X_1, X_2, X_3, X_4 обозначаютъ произведенія множителей каждой кратности отдѣльно, взятыхъ притомъ по одному только разу, т.-е. пусть X_1 есть произведеніе простыхъ множителей, X_2—произведеніе множителей, соотвѣтствующихъ двойнымъ корнямъ, взятыхъ по одному только разу, и т. д. Тогда

$$\varphi(x)=X_1X_2^2X_3^3X_4^4.$$

Произведеніе множителей, общихъ многочлену X и его производной, по предыдущимъ теоремамъ, будетъ:

$$P=X_2X_3^2X_4^3.$$

Произведеніе P_1 множителей, общихъ P и его производной, по тѣмъ же теоремамъ, будетъ:

$$P_1=X_3X_4^2.$$

Наконецъ, произведеніе P_2 множителей, общихъ P_1 и его производной, будетъ:

$$P_2=X_4.$$

Если данное уравненіе не имѣетъ корней, степень кратности которыхъ выше 4, то P_2 уже не будетъ имѣть общихъ множителей со своею производной; въ противномъ случаѣ надо продолжать наши дѣйствія въ томъ же направленіи, до тѣхъ поръ пока не

получимъ выраженія, не имѣющаго болѣе общаго дѣлителя со своею производною. Дѣлимъ теперь каждое изъ предыдущихъ равенствъ на слѣдующее:

$$\frac{\varphi(x)}{P} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$
$$\frac{P}{P_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$
$$\frac{P_1}{P_2} = Q_2 = X_3 X_4,$$
$$P_2 = X_4.$$

Дѣля каждое изъ этихъ равенствъ на слѣдующее, получаемъ:

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_2, \quad \frac{Q_2}{P_2} = X_3, \quad P_2 = X_4$$

Итакъ, посредствомъ простыхъ дѣленій можно найти X_1, X_2, X_3, X_4; рѣшая же уравненія:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

не имѣющія болѣе кратныхъ корней, получимъ отдѣльно простые корни, отдѣльно двойные, тройные, четверные, . . . даннаго уравненія.

§ 206. Примѣръ I.—Приложимъ предыдущій методъ къ уравненію

$$\varphi(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0$$

Составляемъ производную:

$$\varphi'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4x + 12 = 4(x^3 + 3x^2 + x + 3).$$

Посредствомъ послѣдовательныхъ дѣленій получаемъ слѣдующія уравненія:

$$4\varphi(x) = (x+1).\varphi'(x) - 8(x^2 - 4x - 21),$$
$$\varphi'(x) = 4(x+7).(x^2 - 4x - 21) + 200(x+3),$$
$$x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7).$$

Слѣдовательно, общій множитель для $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ есть $(x+3)$. Итакъ, -3 есть двойной корень; въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ дѣленія находимъ:

$$\varphi(x) = (x+3)^2.(x^2 - 2x + 5).$$

Примѣръ II.—Пусть дано еще уравненіе:

$$\varphi(x)=x^5-10x^2+15x-6=0.$$

Составляемъ производную:

$$\varphi'(x)=5(x^4-4x+3)$$

Послѣдовательныя дѣленія даютъ:

$$x^5-10x^2+15x-6=x(x^4-4x+3)-6(x^2-2x+1),$$
$$x^4-4x+3=(x^2-2x+1)(x^2+2x+3)=$$
$$=(x-1)^2(x^2+2x+3).$$

Слѣдовательно, общій наибольшій дѣлитель для $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ есть $(x-1)^2$. Итакъ, въ данномъ уравненіи только одинъ кратный корень, именно тройной, $x=1$, въ самомъ дѣлѣ.

$$\varphi(x)=(x-1)^3.(x^2+3x+6).$$

Примѣръ III.—Дано уравненіе:

$$\varphi(x)=x^6-7x^5+15x^4-40x^2+48x-16=0;$$

первая производная есть

$$\varphi'(x)=6x^5-35x^4+60x^3-80x+48.$$

Мы уже раньше нашли (**§ 199**), что произведеніе общихъ множителей для этихъ двухъ функцій есть

$$x^3-6x^2+12x-8,$$

или, что то же самое,

$$(x-2)^3.$$

Слѣдовательно, четыре корня предложеннаго уравненія равны, каждый, 2; въ самомъ дѣлѣ,

$$\varphi(x)=(x-2)^4.(x^2+x-1).$$

Примѣръ IV.—Наконецъ, пусть будетъ дано уравненіе:

$$\varphi(x)=x^6-10x^5+47x^4-140x^3+271x^2-330x+225=0;$$

его производная будетъ:

$$\varphi'(x)=6x^5-50x^4+188x^3-420x^2+542x-330.$$

Послѣдовательныя дѣленія даютъ:

$$6\varphi(x)=\varphi'(x)\left(x-\frac{5}{3}\right)+\frac{22}{3}(x^4-10x^3+36x^2-70x+75),$$
$$\varphi'(x)=2(3x+5)(x^4-10x^3+36x^2-70x+75)+72(x^3-5x^2+11x-15),$$
$$x^4-10x^3+36x^2-70x+75=(x^3-5x^2+11x-15)(x-5).$$

Слѣдовательно, произведеніе множителей, общихъ обоимъ многочленамъ, будетъ:

$$x^3-5x^2+11x-15.$$

Дѣлимъ это произведеніе на его производную, предварительно умноживъ его на 3:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-15x^2+33x-45 & 3x^2-10x+11 \\ \hline -5x^2+22x-45 & x-5 \end{array};$$

остатокъ умножаемъ также на 3 и продолжаемъ дѣленіе:

$$\begin{array}{r} -15x^2+66x-135 \\ \hline 16x-80 \end{array};$$

опуская множитель 16, видимъ, что послѣдній остатокъ можетъ быть замѣненъ двучленомъ $(x-5)$; послѣ этого упрощенія продолжать далѣе нѣтъ надобности, такъ какъ $(3x^2-10x+11)$, очевидно, не обращается въ нуль при $x=+5$ и, слѣдовательно, не дѣлится на $(x-5)$. Итакъ, общій дѣлитель $(x^3-5x^2+11x-15)$ для $\varphi(x)$ и ея производной не имѣетъ кратныхъ множителей и потому $\varphi(x)$ имѣетъ только три двойныхъ корня, которые въ то же время суть корни уравненія:

$$x^3-5x^2+11x-15=0.$$

КОНСПЕКТЪ.

§ 196 Опредѣленіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ многочленовъ.— **§ 197.** Способъ его полученія, подобный тому, который употребляется для двухъ чиселъ.—**§ 198.** Важное замѣчаніе о введеніи или опусканіи численныхъ множителей при послѣдовательныхъ дѣленіяхъ.—**§ 199.** Примѣры. **§ 200.** Разысканіе общихъ корней двухъ уравненій.—**§ 201.** Цѣль теоріи равныхъ корней.— **§ 202.** Необходимое и достаточное условіе, чтобы корень a даннаго уравненія

былъ бы n-кратнымъ. — § 203. Другое выраженіе того же условія.— § 204. Приведеніе общихъ множителей первой части уравненія и ея производной; какъ узнают, будетъ ли уравненіе имѣть равные корни. — § 205. Приведеніе уравненія съ кратными корнями къ нѣсколькимъ другимъ, не имѣющимъ кратныхъ корней.— § 206. Примѣры.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Разложить на множителей многочленъ:

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3$$

Отв.:

$$f(x) = (x-1)^3(x^2 + x + 3).$$

II. Разложить на множителей многочленъ:

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16.$$

Отв.:

$$f(x) = (x+1)^2(x-2)^4.$$

III. Разложить на множителей многочленъ:

$$f(x) = x^6 - 24x^4 + 32x^3 + 144x^2 - 384x + 256.$$

Отв.:

$$f(x) = (x+4)^2(x-2)^4.$$

IV. Разложить на множителей многочленъ:

$$f(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 - x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 12x - 4.$$

Отв.:

$$f(x) = (x^2 + x + 2)^2(x+1)(x^2 - x - 1).$$

V. Разложить на множителей многочленъ:

$$f(x) = x^7 - 12x^5 - 2x^4 + 39x^3 - 6x^2 + 44x + 24.$$

Отв.:

$$f(x) = (x-1)^3(x+2)^3(x-3).$$

VI. Пусть P и Q обозначаютъ два многочлена относительно x, съ вещественными или мнимыми коэффиціентами, не имѣющихъ никакого общаго множителя, а P' и Q' пусть обозначаютъ ихъ производныя. Если уравненіе $P^2 + Q^2 = 0$ имѣетъ двойной корень, то этотъ корень, вещественный или мнимый, будетъ также принадлежать уравненію: $P'^2 + Q'^2 = 0$.

Примѣръ:

$$P = x^2 - 1, \ Q = 2x, \ P^2 + Q^2 = (x^2+1)^2, \ P'^2 + Q'^2 = 4(x^2+1);$$

исходятъ изъ тождества:

$$(P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1}) = P^2 + Q^2.$$

VII. Если a есть n-кратный корень уравненія $\varphi(x)=0$, то онъ будетъ $(n-1)$-кратнымъ корнемъ новаго уравненія, которое мы получимъ, умноживъ члены даннаго, предполагаемаго полнымъ, соотвѣтственно на послѣдовательные члены какой-нибудь ариѳметической прогрессіи.

Исходить изъ теоремы § 203-го.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Соизмѣримые корни.

1. Предѣлы корней.

§ 207. Опредѣленіе.—*Высшимъ предѣломъ* положительныхъ корней уравненія называется всякое число, большее, чѣмъ наибольшій изъ положительныхъ корней; *низшимъ предѣломъ* называется всякое число, меньшее, чѣмъ наименьшій изъ нихъ.

Низшимъ предѣломъ отрицательныхъ корней называется всякое число, меньшее, чѣмъ наименьшій изъ отрицательныхъ корней; *высшимъ предѣломъ* называется всякое число, большее, чѣмъ наибольшій изъ нихъ.

При рѣшеніи численнаго уравненія полезно знать предѣлы его корней. Вотъ нѣкоторыя правила для ихъ нахожденія.

§ 208. Первое правило.—*Если въ уравненіи степени m:*

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$$

абсолютная величина наибольшаго отрицательнаго коэффиціента есть N и если n есть разность между степенью уравненія и степенью перваго отрицательнаго члена, то $1+\sqrt[n]{N}$ *есть высшій предѣлъ положительныхъ корней.*

Въ самомъ дѣлѣ, если при подстановкѣ на мѣсто x числа l, а также всякаго другого, большаго l, первый членъ уравненія будетъ оставаться постоянно положительнымъ, то l, очевидно, будетъ высшимъ предѣломъ положительныхъ корней. Очевидно, что это число l достаточно выбрать такъ, чтобы оно удовлетворяло неравенству:

$$x^m-N(x^{m-n}+x^{m-n-1}+\ldots+x+1)>0; \qquad (1)$$

дѣйствительно, составляя это неравенство, мы, съ одной стороны, опустили всѣ положительные члены между x^m и x^{m-n}, а съ другой

стороны, замѣнили во всѣхъ послѣдующихъ членахъ ихъ коэффиціенты на N. Неравенство (1) равносильно неравенству:

$$x^m - N\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} > 0,$$

или

$$x^m(x-1) - N(x^{m-n+1}-1) > 0, \qquad (2)$$

потому что всегда можно предположить $x>1$. Послѣднее же неравенство удовлетворится, если удовлетворить неравенству:

$$x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > 0. \qquad (3)$$

которое мы получаемъ изъ предыдущаго, уменьшая его первую часть. Дѣлимъ, далѣе, обѣ части неравенства (3) на x^{m-n+1}:

$$x^{n-1}(x-1) - N > 0;$$

полученное неравенство удовлетворится, если удовлетворится такое:

$$(x-1)^{n-1}(x-1) - N > 0, \text{ или } (x-1)^n - N > 0.$$

Отсюда видно, что x достаточно выбрать такъ, чтобы

$$x > 1 + \sqrt[n]{N}, \qquad (4)$$

что и требовалось доказать.

Если первый отрицательный членъ есть членъ съ x^{m-1}, то $n=1$, и найденный предѣлъ обращается въ этомъ случаѣ въ $1+N$.

§ 209. Второе правило, данное Ньютономъ. — *Всякое число l, обращающее первую часть уравненія $f(x)=0$ и всѣ ея производныя въ положительныя числа, есть высшій предѣлъ положительныхъ корней.*

Въ самомъ дѣлѣ, если уменьшить на l каждый изъ корней уравненія, полагая $y=x-l$, или, что то же самое, $x=l+y$, то уравненіе преобразуется въ слѣдующее.

$$f(l+y)=f(l)+f'(l)y+f''(l)\frac{y^2}{1.2}+\ldots+f^{(m)}(l)\frac{y^m}{1.2\ldots m}=0.$$

А такъ какъ, по предположенію, всѣ коэффиціенты: $f(l)$, $f'(l)$, $f''(l)$, ..., $f^{(m)}(l)$ — положительны, то никакое положительное число, будучи подставлено на мѣсто y, не можетъ удовлетворить этому уравненію; слѣдовательно, послѣднее не имѣетъ положительныхъ

корней. Другими словами, всѣ его вещественные корни — отрицательны, т.-е. всякое вещественное значеніе x меньше l. Это и требовалось доказать.

Чтобы приложить это правило, размѣщають функціи въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x),\ f^{m-2}(x),\ \ldots\ ,\ f'(x),\ f(x);$$

такъ какъ $f^m(x)$ равна $1\,.\,2\,.\,3\ldots m$ и поэтому всегда положительна, то выбираютъ сначала наименьшее цѣлое число, придающее функціи $f^{m-1}(x)$ положительное значеніе. Подставляютъ это число въ $f^{m-2}(x)$: если получится отрицательное значеніе, то выбранное число увеличиваютъ на одну или нѣсколько единицъ постепенно, до тѣхъ поръ пока $f^{m-2}(x)$ не станетъ положительною. Затѣмъ новое число подставляютъ въ функцію $f^{m-3}(x)$; и если послѣдняя выйдетъ отрицательною, то это число также увеличиваютъ, до тѣхъ поръ пока $f^{m-3}(x)$ въ свою очередь не приметъ положительнаго значенія. Такимъ образомъ испытываютъ всѣ функціи до $f(x)$. Число l, которое, послѣ всѣхъ этихъ подстановокъ, придастъ $f(x)$ положительное значеніе, будетъ искомымъ числомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что нѣкоторое число a, полученное по этому способу, придастъ положительныя значенія функціямъ: $f^{m-1}(x)$, $f^{m-2}(x)$, . . . , $f^{m-n}(x)$. Не трудно замѣтить, что если это число увеличить на h единицъ, то оно тѣмъ же самымъ функціямъ по-прежнему будетъ придавать положительныя значенія; для доказательства достаточно разсмотрѣть общій случай:

$$f^p(a+h)=f^p(a)+f^{p+1}(a)h+f^{p+2}(a)\frac{h^2}{1.2}+f^{p+3}(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots$$

Если $f^p(a)$, $f^{p+1}(a)$, $f^{p+2}(a)$, . . . — положительны, то и $f^p(a+h)$ также положительна, потому что h—положительно. Полагая $p=m-1$, находимъ прежде всего, что такъ какъ $f^{m-1}(a)$—положительна, то и $f^{m-1}(a+h)$ также положительна. Далѣе, полагая $p=m-2$ и принимая во вниманіе, что $f^{m-2}(a)$ и $f^{m-1}(a)$—положительны, найдемъ, что и $f^{m-2}(a+h)$ также положительна, и т. д.

§ 210. Третій способъ. — Наконецъ, можно опредѣлять высшій предѣлъ корней, дѣля первую часть уравненія на группы изъ нѣсколькихъ членовъ. Пусть, напр., дано уравненіе:

$$x^5+7x^4-12x^3-49x^2+52x-13=0.$$

Группируемъ члены слѣдующимъ образомъ:

$$x^3(x^2-12)+7x^2(x^2-7)+52\left(x-\frac{1}{4}\right)=0.$$

Число 4, подставленное на мѣсто x, очевидно, придастъ каждой группѣ положительное значеніе и, слѣдовательно, есть высшій предѣлъ для корней.

Также, члены уравненія:

$$x^4-5x^3+37x^2-3x+39=0$$

могутъ быть разбиты на слѣдующія группы:

$$x^2(x^2-5x+7)+30x\left(x-\frac{1}{10}\right)+39=0.$$

Здѣсь, трехчленъ x^2-5x+7, имѣя мнимые корни, положителенъ при всякомъ x; вторая же группа положительна при $x=1$; слѣдовательно, 1 есть высшій предѣлъ для корней.

На этихъ примѣрахъ видно, что все искусство заключается въ томъ, чтобы разбить первую часть уравненія на такія группы, каждая изъ которыхъ начиналась бы положительнымъ членомъ, и найти наименьшее цѣлое число, придающее знакъ $+$ каждой изъ этихъ группъ.

§ 211. Замѣчаніе.—По первому способу для корней перваго уравненія мы нашли бы предѣлъ $1+\sqrt{49}$, или, что то же самое, 8; для второго уравненія по этому же способу нашли бы $1+5$, равное 6.

Чтобы приложить къ первому уравненію способъ Ньютона, пишемъ:

$$f(x)=x^5+7x^4-12x^3-49x^2+52x-13,$$

$$f'(x)=5x^4+28x^3-36x^2-98x+52,$$

$$\frac{1}{1.2}f''(x)=10x^3+42x^2-36x-49,$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=10x^2+28x-12,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}f''''(x)=5x+7,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}f^{V}(x)=1.$$

Отсюда видно, что всякое положительное число придаетъ $f^{IV}(x)$ положительное значеніе; далѣе видно, что 1 придаетъ положительное значеніе $f'''(x)$, что 2 придаетъ положительныя значенія $f''(x)$ и $f'(x)$ и что, наконецъ, 3, обращая $f(x)$ въ положительное число, есть высшій предѣлъ.

Чтобы приложить тотъ же способъ ко второму уравненію, пишемъ.

$$f(x)=x^4-5x^3+37x^2-3x+39,$$

$$f'(x)=4x^3-15x^2+74x-3,$$

$$\frac{1}{1.2}f''(x)=6x^2-15x+37,$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=4x-5,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}f^{IV}(x)=1.$$

Отсюда видно, что 2 обращаетъ въ положительныя числа $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$ и $f(x)$; слѣдовательно, 2 есть высшій предѣлъ.

§ 212. Низшій предѣлъ положительныхъ корней. — Полагаемъ въ уравненіи $x=\frac{1}{y}$ и отыскиваемъ высшій предѣлъ l для корней преобразованнаго уравненія; очевидно, что $\frac{1}{l}$ будетъ низшимъ предѣломъ положительныхъ корней даннаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, если $y<l$, то $x>\frac{1}{l}$.

§ 213. Предѣлы отрицательныхъ корней — Полагаемъ $x=-y$ и отыскиваемъ высшій и низшій предѣлы, l и l', положительныхъ корней преобразованнаго уравненія; $-l$ и $-l'$ будутъ соотвѣтственно низшимъ и высшимъ предѣлами отрицательныхъ корней даннаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, если

$$l>y>l',$$

то

$$-l<x<-l'.$$

II. Разысканіе соизмѣримыхъ корней.

§ 214. Посредствомъ весьма простыхъ испытаній, производимыхъ по правиламъ, можно отдѣлить соизмѣримые корни уравненія съ соизмѣримыми коэффиціентами.

Сначала мы покажемъ, что разысканіе такихъ корней сводится на разысканіе цѣлыхъ корней, и для этого выведемъ слѣдующую теорему.

Теорема. — *Уравненіе вида:*

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \qquad (1)$$

гдѣ коэффиціентъ при первомъ членѣ есть единица, а остальные коэффиціенты — цѣлыя числа, не можетъ имѣть дробнаго соизмѣримаго корня.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{a}{b}$ есть корень уравненія (1), то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m + A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + A_2\left(\frac{a}{b}\right)^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

умножая же всѣ члены на b^{m-1} и перенося ихъ, кромѣ перваго, во вторую часть, получимъ:

$$\frac{a^m}{b} = -(A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2}b + \ldots + A_mb^{m-1}).$$

Если предположить — а это, очевидно, возможно —, что дробь $\frac{a}{b}$ приведена къ своему простѣйшему виду, т.-е. что a и b — взаимно-простыя числа, то и $\frac{a^m}{b}$ представитъ несократимую дробь; слѣдовательно, $\frac{a^m}{b}$ не можетъ равняться второй части, всѣ члены которой суть цѣлыя числа. Отсюда заключаемъ, что уравненіе (1) не можетъ имѣть корня вида $\frac{a}{b}$. Итакъ, возможные соизмѣримые корни уравненія (1) суть только цѣлые.

§ 215. Слѣдствіе. — Предыдущая теорема даетъ возможность преобразовать уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами такимъ образомъ, что всѣ его соизмѣримые корни будутъ цѣлыми.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дано уравненіе:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0;$$

въ немъ можно предположить всѣ коэффиціенты $A, A_1, \ldots, A_m$ цѣлыми, потому что всегда легко освободиться отъ знаменателей, умноживъ на ихъ общее наименьшее кратное всѣ члены уравненія.

Полагаемъ $x = \frac{y}{A}$, гдѣ y — новая неизвѣстная, которая, очевидно, должна удовлетворять уравненію:

$$A\left(\frac{y}{A}\right)^m + A_1\left(\frac{y}{A}\right)^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

или, послѣ умноженія обѣихъ его частей на A^{m-1}, уравненію:

$$y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 A y^{m-2} + \ldots + A_m A^{m-1} = 0.$$

Коэффиціенты этого послѣдняго уравненія — цѣлые и, кромѣ того, коэффиціентъ при первомъ членѣ y^m есть единица; слѣдовательно, соизмѣримыя значенія y — всѣ цѣлыя. Эти значенія, очевидно, соотвѣтствуютъ соизмѣримымъ значеніямъ x; дѣйствительно, соотношеніе: $x = \frac{y}{A}$ показываетъ, что x и y одновременно соизмѣримы.

Итакъ, изъ предыдущаго ясно, что если намъ удастся получить цѣлые корни уравненія относительно y, то мы немедленно получимъ и всѣ соизмѣримые корни относительно x.

§ 216. Необходимыя и достаточныя условія, чтобы цѣлое число было коренмъ даннаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами. — Мы видѣли, какъ разысканіе соизмѣримыхъ корней можетъ быть сведено на разысканіе цѣлыхъ корней. Остается показать, какъ можно получить цѣлые корни уравненія съ цѣлыми коэффиціентами.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$Ax^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

и пусть α есть одинъ изъ его цѣлыхъ корней. Въ такомъ случаѣ первая часть уравненія должна дѣлиться на $(x-\alpha)$ и частное должно быть многочленомъ $(m-1)$-ой степени; обозначаемъ его черезъ

$$Ax^{m-1} + P_1 x^{m-2} + P_2 x^{m-3} + \ldots + P_{m-2}x + P_{m-1},$$

гдѣ $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$, очевидно, цѣлыя числа, такъ какъ коэффиціентъ при первомъ членѣ дѣлителя $(x-\alpha)$ — единица и, слѣдовательно, не можетъ быть введено при дѣленіи никакого знаменателя. Теперь мы можемъ написать тождество:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(Ax^{m-1} + P_1 x^{m-2} + \ldots + P_{m-2}x + P_{m-1}) = \\ = Ax^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,\end{aligned} \qquad (2)$$

выражающее, что дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное. Выполняя указанныя дѣйствія въ первой части этого равенства и приравнивая другъ другу коэффиціенты при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ x, получаемъ:

$$\left.\begin{array}{r} -P_{m-1}\alpha = A_m, \\ P_{m-1} - P_{m-2}\alpha = A_{m-1}, \\ P_{m-2} - P_{m-3}\alpha = A_{m-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_2 - P_1\alpha = A_2, \\ P_1 - A\alpha = A_1. \end{array}\right| \qquad (3)$$

Всѣ числа, входящія въ эти уравненія, — цѣлыя; поэтому, изъ перваго уравненія выводимъ, что α должно быть однимъ изъ дѣлителей A_m и что частное $\frac{A_m}{\alpha}$ равно $-P_{m-1}$.

Переписывая второе уравненіе въ видѣ

$$-P_{m-2}\alpha = A_{m-1} - P_{m-1} = A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha},$$

заключаемъ, что α должно быть дѣлителемъ суммы $A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}$ и что частное $\frac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}$ равно $-P_{m-2}$.

Переписывая третье уравненіе въ видѣ:

$$-P_{m-3}\alpha = A_{m-2} - P_{m-2} = A_{m-2} + \frac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha},$$

заключаемъ, что α должно быть дѣлителемъ суммы $A_{m-2} + \frac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}$, полученной отъ сложенія A_{m-2} съ предыдущимъ частнымъ, и что новое частное равно $-P_{m-3}$.

Такимъ образомъ можно продолжать до послѣдняго уравненія, которое покажетъ, что послѣднее частное $-P_1$, сложенное съ A_1, должно раздѣлиться на α и дать въ частномъ $-A$.

Эти условія — необходимы. Ихъ же и достаточно, чтобы α было корнемъ; дѣйствительно, если они — выполнены, то можно найти числа: $P_{m-1}, P_{m-2}, \dots, P_1$, обращающія уравненія (3) въ тождества, откуда слѣдуетъ, что первая часть предложеннаго уравненія дѣлится на $(x-\alpha)$.

Можно еще замѣтить, что если число α есть корень уравненія, то одновременно съ его испытаніемъ опредѣляются и коэффиціенты частнаго отъ дѣленія первой части на $(x-\alpha)$. Въ самомъ дѣлѣ, эти коэффиціенты P_{m-1}, P_{m-2} . . . равны частнымъ съ обратными знаками отъ различныхъ дѣленій, точное выполненіе которыхъ необходимо, чтобы α было бы корнемъ уравненія.

§ 217. Разысканіе цѣлыхъ корней.—Изъ предыдущаго вытекаетъ, что для нахожденія цѣлыхъ корней уравненія вида (1) нужно сначала найти цѣлыхъ дѣлителей, положительныхъ или отрицательныхъ, послѣдняго члена, такъ какъ только они могутъ быть искомыми корнями. Затѣмъ опредѣляютъ высшій предѣлъ положительныхъ корней и низшій предѣлъ отрицательныхъ и отбрасываютъ всѣхъ дѣлителей, не содержащихся между этими предѣлами. Если α есть одинъ изъ оставшихся дѣлителей, то для его испытанія дѣлятъ на него послѣдній членъ A_m и къ частному прикладываютъ коэффиціентъ A_{m-1}. Полученная сумма должна дѣлиться на α, если α—корень; дѣлятъ ее на α и къ частному прикладываютъ A_{m-2}. Новая сумма тоже должна дѣлиться на α, если α — корень. Эти дѣленія продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не дойдутъ до частнаго, которое, будучи сложено съ коэффиціентомъ второго члена и раздѣлено на α, даетъ—A.

§ 218. Какъ уменьшить число испытаній.—Можно уменьшить число испытаній, пользуясь слѣдующимъ замѣчаніемъ. Если α есть корень уравненія:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \qquad (1)$$

то первая часть этого уравненія дѣлится на $(x-\alpha)$ и коэффиціенты частнаго — всѣ цѣлые, какъ это и было объяснено выше, поэтому, если придать x какое-нибудь цѣлое значеніе, то численное значеніе первой части уравненія (1) будетъ дѣлиться на численное значеніе $(x-\alpha)$. Простѣйшія значенія, какія можно придать x, суть $+1$ и -1, слѣдовательно, называя черезъ Q и Q_1 соотвѣтственныя значенія первой части уравненія, мы должны испытывать α только въ томъ случаѣ, если, съ одной стороны, Q дѣлится на $(1-\alpha)$, или на $(\alpha-1)$, отличающееся отъ перваго выраженія только знакомъ, а съ другой стороны, если Q_1 дѣлится на $(-1-\alpha)$, или на $(1+\alpha)$, отличающееся отъ предыдущаго только знакомъ.

§ 219. Приложеніе предыдущаго способа.—Вотъ наиболѣе выгодный пріемъ расположенія вычисленій:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{m-2},\ A_{m-1},\ A_m$$
$$A,\ P_1,\ \ldots,\ P_{m-3},\ P_{m-2},\ P_{m-1},\ \alpha.$$

Коэффиціенты даннаго уравненія, начиная со второго, пишемъ въ горизонтальную строку, а справа, строкою ниже, ставимъ испытуемый дѣлитель α; въ одной строкѣ съ α, отъ правой руки къ лѣвой, пишемъ частныя: P_{m-1}, P_{m-2}, . . . *съ обратными знаками*, вычисленныя, какъ показано выше (§ 216), соотвѣтственно подъ A_m, A_{m-1}, . . . Если всѣ эти частныя—цѣлыя и если, кромѣ того, число, написанное подъ A_1, есть $+A$, то α—корень; $A, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ въ этомъ случаѣ будутъ коэффиціентами уравненія, освобожденнаго отъ корня α. Послѣ этого надъ второю строчкою остается произвести тѣ же дѣйствія, что и надъ первою. Если нѣкоторыя изъ дѣленій не могутъ быть выполнены, то переходимъ къ другому дѣлителю.

Примѣръ.—Дано уравненіе:

$$f(x)=x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0.$$

$-2,$	$-19,$	$+68,$	-60	
$1,$	$0,$	$-19,$	$+30$	2 есть корень
	$1,$	$2,$	15	2 есть корень
		$1,$	$+5$	3 есть корень
			$+1$	-5 есть корень.

60 имѣетъ 24 дѣлителя, но по правилу Ньютона находимъ, что всѣ корни лежатъ между 4 и -6; поэтому, мы должны испытать только тѣхъ дѣлителей 60, которые меньше 4 и больше -6. Начинаемъ съ $+1$ и -1, подставляя ихъ непосредственно на мѣсто x: ни одинъ изъ этихъ дѣлителей не оказывается корнемъ; но за то мы узнаемъ, что $f(1)=-12$ и $f(-1)=-144$. Отсюда слѣдуетъ, что изъ положительныхъ дѣлителей мы должны испытать только такіе, которые, уменьшенные на 1, дѣлятъ 12, а увеличенные на 1, дѣлятъ 144; изъ отрицательныхъ же—только такіе, абсолютная величина которыхъ, увеличенная на 1, дѣлитъ 12, а уменьшенная на 1, дѣлитъ 144.

Дѣлитель 2 удовлетворяетъ этимъ условіямъ: испытываемъ и

находимъ, что 2 есть корень и что уравненіе по освобожденіи отъ этого корня будетъ:

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

Такъ какъ 2 дѣлитъ 30, то испытываемъ его снова; такъ же поступаемъ и съ остальными дѣлителями, удовлетворяющими предыдущимъ условіямъ и дѣлящими, сверхъ того, каждый разъ извѣстный членъ послѣдняго упрощеннаго уравненія.

Выполнивъ всѣ вычисленія, находимъ, что заданное уравненіе имѣетъ корни: 2, 2, 3, -5 и что, слѣдовательно, его первая часть равна $(x-2)^2(x-3)(x+5)$.

КОНСПЕКТЪ.

§ 207. Что называется высшимъ и низшимъ предѣломъ положительныхъ и отрицательныхъ корней уравненія.—**§§ 208, 209** и **210**. Различныя правила для нахожденія высшаго предѣла корней. **§ 211**. Приложенія.—**§ 212.** Низшій предѣлъ положительныхъ корней.—**§ 213.** Предѣлы отрицательныхъ корней.—**§ 214.** Если коэффиціентъ при первомъ членѣ уравненія единица, а остальные коэффиціенты—цѣлыя числа, то всѣ соизмѣримые корни непремѣнно цѣлые.—**§ 215.** Предыдущая теорема даетъ возможность преобразовать уравненіе съ раціональными коэффиціентами въ другое, корни котораго были бы цѣлыми.—**§ 216.** Необходимыя и достаточныя условія, чтобы цѣлое число было корнемъ даннаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами.—**§ 217.** Разысканіе цѣлыхъ корней.—**§ 218.** Теорема, при помощи которой можно уменьшить число испытаній. **§ 219.** Приложеніе этого способа къ примѣру.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Разыскать соизмѣримые корни уравненій:

$$x^7 \quad 5x^6 \quad 78x^5 + 499x^4 + 172x^3 - 4269x^2 + 1156x + 11320 = 0,$$

$$x^4 - x^3 - 13x^2 + 16x - 48 = 0,$$

$$15x^5 - 19x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 19x + 6 = 0,$$

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0.$$

II. Разыскать соизмѣримые корни уравненія, не приводя его предварительно къ виду съ цѣлыми соизмѣримыми корнями. Показать, что если дробь $\frac{a}{b}$, приведенная къ своему простѣйшему виду, обозначаетъ соизмѣримый корень, то a должно быть дѣлителемъ послѣдняго члена, а b — дѣлителемъ коэффиціента при первомъ членѣ. Найти, посредствомъ какихъ испытаній, подобныхъ тѣмъ, какія были приведены для цѣлыхъ корней, можно обнаружить, что $\frac{a}{b}$ есть корень.

III. Найти, выражаются ли корни уравненія:

$$x^3 - (a + b + ab)x^2 + ab(a + b + 1)x - ab^2 - a^2b = 0$$

раціонально черезъ a и b

IV. Если уравненіе третьей степени не имѣетъ соизмѣримыхъ корней, то оно не имѣетъ и кратныхъ корней.

V. Предыдущая теорема приложима къ уравненію пятой степени и не приложима къ уравненію четвертой степени

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Теорема Штурма.

§ 220. Теорема, доказательству которой посвящена эта глава, даетъ средство получить точно, по строго опредѣленнымъ правиламъ, число вещественныхъ корней уравненія между какими-угодно двумя данными предѣлами.

Пусть будетъ дано численное уравненіе какой-угодно степени не имѣющее кратныхъ корней, вида:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0. \qquad (1)$$

Начнемъ съ вычисленій, по которымъ узнается, будетъ ли уравненіе имѣть равные корни, пользуясь слѣдующимъ пріемомъ. Обозначая черезъ V первую часть уравненія (1) и черезъ V' ея производную, раздѣлимъ V на V' и въ остаткѣ, степень котораго ниже степени V', измѣнимъ знаки на обратные при всѣхъ членахъ; пусть V_2 обозначаетъ измѣненный такимъ образомъ остатокъ. Раздѣлимъ V' на V_2; въ остаткѣ, послѣ измѣненія его знака на обратный, получимъ многочленъ V_3 степени низшей, чѣмъ V_2. Остатокъ отъ дѣленія V_2 на V_3 съ измѣненнымъ знакомъ назовемъ черезъ V_4. Такъ продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока возможно; при этомъ у насъ составится рядъ многочленовъ съ убывающими степенями, связанныхъ между собою, по опредѣленію дѣленія, слѣдующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} V &= V' \cdot Q_1 - V_2, \\ V' &= V_2 \cdot Q_2 - V_3, \\ V_2 &= V_3 \cdot Q_3 - V_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{r-2} &= V_{r-1} \cdot Q_{r-1} - V_r. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Послѣдній остатокъ V_r будетъ численный. Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны, ни одинъ изъ многочленовъ: V, V', V_2, V_3, ... не можетъ, очевидно, дѣлить предыдущаго, не дѣля всѣхъ тѣхъ, которые предшествуютъ этому послѣднему, въ томъ числѣ V и V', не имѣющихъ, по предположенію, общаго множителя; а съ другой стороны, если остатокъ V_r не есть численный, то можно дѣлить V_{r-1} на V_r и получить еще остатокъ V_{r+1}.

Принимая во вниманіе послѣднее замѣчаніе, изслѣдуемъ функціи: V, V', V_2, ... , V_r; это приведетъ насъ къ правилу, по которому сосчитывается число вещественныхъ корней уравненія: $V = 0$ въ промежуткѣ между двумя числами: α и β. Самое правило при $\beta > \alpha$ читается такъ:

Подставляютъ на мѣсто x число α въ функціи V, V', V_2, ... , V_{r-1}, V_r, затѣмъ пишутъ по порядку, въ одну строку, знаки получаемыхъ результатовъ и сосчитываютъ число перемѣнъ въ этомъ ряду знаковъ. Пишутъ также рядъ знаковъ, принимаемыхъ тѣми же функціями при подстановкѣ на мѣсто x числа β, и сосчитываютъ число перемѣнъ въ этомъ второмъ ряду. На сколько послѣдній рядъ будетъ имѣть меньше перемѣнъ, чѣмъ первый, столько вещественныхъ корней будетъ имѣть уравненіе $V = 0$ въ промежуткѣ отъ α до β. Если во второмъ ряду окажется столько перемѣнъ, сколько и въ первомъ, то уравненіе $V = 0$ не будетъ имѣть ни одного корня въ промежуткѣ отъ α до β. Наконецъ, во второмъ ряду ни въ какомъ случаѣ не можетъ получиться больше перемѣнъ, чѣмъ въ первомъ.

§ 221. Для доказательства этой теоремы нужно изслѣдовать, какъ можетъ измѣниться число перемѣнъ, образуемыхъ знаками функцій: V, V', V_2, ... , V_r, для какого-нибудь значенія x, когда x проходитъ непрерывно отъ значенія α къ большему значенію β.

Каковы бы ни были знаки этихъ функцій для какого-нибудь опредѣленнаго значенія x, измѣненіе въ этомъ ряду знаковъ при весьма маломъ увеличеніи x, начиная съ этого значенія, можетъ наступить только въ томъ случаѣ, если измѣнитъ знакъ одна изъ функцій: V, V', ... , V_r и, слѣдовательно, если она обратится въ нуль. Здѣсь нужно разсмотрѣть два случая: 1) если функція, обращающаяся въ нуль, есть первая V, или 2) если это есть одна изъ промежуточныхъ функцій: V', V_2, ... , V_{r-1} между V и V_r; послѣдняя V_r не можетъ мѣнять знака, такъ какъ она представляетъ положительное или отрицательное число.

Посмотримъ, прежде всего, какое измѣненіе испытываетъ рядъ знаковъ, когда x, непрерывно увеличиваясь, достигаетъ и проходитъ то значеніе, при которомъ обращается въ нуль первая функція V. Назовемъ это значеніе черезъ a; функція V', производная отъ V, не можетъ обратиться въ нуль одновременно съ V, потому что, по предположенію, уравненіе: $V=0$ не имѣетъ равныхъ корней. Разсмотримъ значенія x, весьма близкія къ a; называя черезъ h сколь угодно малое положительное количество, полагаемъ $x=a-h$ и $x=a+h$. Функція V' при этихъ двухъ значеніяхъ приметъ тотъ же знакъ, что и при $x=a$, потому что h можно взять на столько малымъ, что V' не обратится въ нуль и, слѣдовательно, не измѣнитъ знака при возрастаніи x отъ $a-h$ до $a+h$. Принимая сказанное во вниманіе и обозначая V черезъ $F(x)$, пишемъ равенство,

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\ldots,$$

откуда, замѣчая, что $F(a)$ есть нуль, а $F'(a)$ не нуль, выводимъ:

$$F(a+h)=h\left[F'(a)+\frac{F''(a)}{1.2}h+\frac{F'''(a)}{1.2.3}h^2+\ldots\right].$$

Изъ этой формулы видно, что $F(a+h)$ при весьма малыхъ значеніяхъ h имѣетъ тотъ же знакъ, что $F'(a)$, и, слѣдовательно, тотъ же знакъ, что и $F'(a+h)$; такимъ образомъ, при $x=a+h$ нѣтъ перемѣнъ между V и V'.

Также найдемъ:

$$F(a-h)=-h\left[F'(a)-\frac{F''(a)}{1.2}h+\frac{F'''(a)}{1.2.3}h^2-\ldots\right],$$

откуда заключаемъ, что $F(a-h)$ имѣетъ знакъ, обратный знаку $F'(a)$ и, слѣдовательно, обратный знаку $F'(a-h)$; такимъ образомъ, при $x=a-h$ есть одна перемѣна между V и V'.

Итакъ, знаки функцій: V и V' образуютъ перемѣну до значенія, при которомъ V обращается въ нуль; а какъ только x пройдетъ черезъ это значеніе, перемѣна сейчасъ же обращается въ повтореніе знака.

Каждая изъ остальныхъ функцій: V', V_2, ..., V_r будетъ имѣть при $x=a+h$ тотъ же знакъ, что и при $x=a-h$, если только ни одна изъ нихъ не обращается въ нуль при $x=a$, одновременно съ V.

Рядъ знаковъ функцій: V. V', V_2. . . . . V теряетъ, слѣдовательно, одну перемѣну, когда x, возрастая, проходитъ значеніе a, при которомъ изъ всѣхъ этихъ функцій только V обращается въ нуль. Теперь нужно изслѣдовать тотъ случай, когда какая-нибудь другая изъ этихъ функцій обращается въ нуль, что можетъ случиться или при значеніи x, равномъ корню уравненія: $V=0$, или при какомъ-нибудь другомъ значеніи этой перемѣнной.

§ 222. Если V_n обозначаетъ одну изъ функцій: V', V_2, . . . , V_{r-1}, промежуточныхъ между V и V_r, обращающуюся въ нуль при $x=b$, то это значеніе перемѣнной не можетъ привести къ нулю ни функцію V_{n+1}, которая слѣдуетъ за V_n, ни функцію V_{n-1}, предшествующую V_n. (Если бы V_n обозначало V', то V_{n-1} обозначало бы V). Въ самомъ дѣлѣ, между тремя послѣдовательными функціями: V_{n-1}, V_n, V_{n+1} существуетъ зависимость вида:

$$V_{n-1}=V_nQ_n-V_{n+1}, \tag{3}$$

и если бы двѣ послѣдовательныя функціи: V_{n-1} и V_n обратились бы въ нуль при одномъ и томъ же значеніи x, то, какъ показываетъ уравненіе (3), V_{n+1} обратилась бы тоже въ нуль; а такъ какъ

$$V_n=V_{n+1}Q_{n+1}-V_{n+2},$$

то то же случилось бы и съ V_{n+2}, далѣе—съ V_{n+3}, . . . и, наконецъ, при томъ же самомъ значеніи x должно было бы обратиться въ нуль V_r, что—невозможно, потому что V_r есть величина постоянная.

Принимая сказанное во вниманіе и удерживая тѣ же обозначенія, подставляемъ на мѣсто x два числа: $b-h$ и $b+h$, весьма мало отличающіяся отъ b; при этихъ обоихъ значеніяхъ перемѣнной x функціи: V_{n-1} и V_{n+1} будутъ имѣть тѣ же знаки, что и при $x=b$, потому что h можно выбрать достаточно малымъ, чтобы V_{n-1} и V_{n+1} не мѣняли своихъ знаковъ въ промежуткѣ отъ $b-h$ до $b+h$; но такъ какъ V_n, по предположенію, обращается въ нуль при $x=b$, то изъ уравненія (3) слѣдуетъ, что V_{n-1} и V_{n+1} имѣютъ противоположные знаки, откуда заключаемъ, что каковы бы ни были знаки V_n при $x=b-h$ и при $x=b+h$, три функціи:

$$V_{n-1},\ V_n,\ V_{n+1}$$

дадутъ всегда одно повторенiе и одну перемѣну: функцiя V_u необходимо—одного знака съ одною изъ функцiй, между которыми она содержится, и—противоположнаго съ другою.

Слѣдовательно, не происходитъ никакого измѣненiя во всемъ числѣ перемѣнъ знака, когда x переходитъ отъ $b-h$ къ $b+h$, проходя черезъ значенiе b.

Итакъ, доказано, что всякiй разъ какъ перемѣнная x, непрерывно возрастая, достигаетъ и проходитъ значенiе, обращающее V въ нуль, рядъ знаковъ функцiй: V, V', V_2, . . . , V_r теряетъ одну перемѣну, образуемую знаками функцiй: V и V' до этого значенiя, послѣ котораго она переходитъ въ повторенiе; измѣненiя же знаковъ промежуточныхъ функцiй: V', V_2, . . . , V_{r-1} ни въ какомъ случаѣ не могутъ ни увеличить, ни уменьшить все число перемѣнъ. Поэтому, если x будетъ возрастать отъ какого-нибудь числа α, положительнаго или отрицательнаго, до другого какого-нибудь числа β, бóльшаго, чѣмъ α, то въ промежуткѣ отъ α до β будетъ столько значенiй для x, обращающихъ V въ нуль, на сколько рядъ функцiй: V, V', . . . , V_r дастъ меньше перемѣнъ знака при $x=\beta$ чѣмъ при $x=\alpha$. Въ этомъ и состоитъ теорема, которую требовалось доказать.

§ 223. При послѣдовательныхъ дѣленiяхъ, служащихъ для составленiя функцiй: V_2, V_3, . . . , V_r, можно предварительно умножать или дѣлить многочлены, принимаемые за дѣлимое или дѣлитель, на произвольныя положительныя числа. Функцiи: V_2, V_3, . . . , V_r, которыя мы при этомъ получимъ, будутъ отличаться отъ разсмотрѣнныхъ нами [см. уравненiя (2)] только положительными численными множителями, а слѣдовательно, эти вторыя функцiи будутъ имѣть соотвѣтственно тѣ же знаки, что и первыя, при какомъ-угодно значенiи x.

Это замѣчанiе даетъ возможность получать при послѣдовательныхъ дѣленiяхъ многочлены съ цѣлыми коэффицiентами, при томъ, конечно, условiи, что коэффицiенты уравненiя: $V=0$ также цѣлые. Но нужно постоянно помнить, что вводимые или опускаемые численные множители непремѣнно должны быть положительными.

§ 224. Если при предѣльномъ значенiи x, $x=\alpha$ или $x=\beta$, обращается въ нуль одна изъ функцiй: V', V_2, . . . , V_{r-1}, то достаточно сосчитать перемѣны знака, пропуская такую функцiю. Это вытекаетъ изъ доказательства, даннаго (§ 222) для случая, когда одна изъ промежуточныхъ функцiй обращается въ нуль. Въ самомъ

дѣлѣ, мы видѣли, что если функція V_n обращается въ нуль при $x=\alpha$, то при $x=\alpha-h$ функціи: V_{n-1}, V_n и V_{n+1} образуютъ только одну перемѣну знака; но эта же перемѣна останется, когда мы опустимъ функцію V_n и разсмотримъ V_{n-1} и V_{n+1}, имѣющія противоположные знаки, какъ двѣ послѣдовательныя функціи.

Если V обращается въ нуль при $x=\alpha$, то заключаемъ, что α есть корень предложеннаго уравненія; правило же будемъ прилагать къ разысканію числа корней между $\alpha+h$ и β. Значеніе $\alpha+h$ дастъ повтореніе знака между V и V' (§ 221); остальныя же функціи при этомъ значеніи получатъ тѣ же знаки, что и при значеніи α.

§ 225. Если извѣстно, что одна изъ функцій V_n, промежуточная между V и V_r, сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ, для всѣхъ значеній x между α и β, то нѣтъ надобности разсматривать функціи за V_n: доказательство можно вести безъ всякаго измѣненія, ограничиваясь V, V', V_2, . . V_n.

§ 226. Если изъ чиселъ: α и β одно выбрать очень большимъ и отрицательнымъ, а другое — очень большимъ и положительнымъ, полагая $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$, то, исходя изъ теоремы Штурма, можно опредѣлить все число вещественныхъ корней. Чтобы всѣ корни были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы ихъ число равнялось степени m уравненія: $V=0$. Но такъ какъ число функцій: V, V', V_2, . . . , V_r, самое большее, есть $m+1$, то число перемѣнъ знака, не превосходящее m, можетъ достигнуть своего предѣла только въ томъ случаѣ, когда рядъ *полный*, т.-е. когда послѣдовательныя степени идутъ, уменьшаясь отъ каждой функціи къ слѣдующей ровно на единицу. Кромѣ того, для вещественности всѣхъ корней, необходимо, чтобы подстановка $-\infty$ на мѣсто x давала бы только перемѣны, а подстановка $+\infty$ только повторенія знака. Такъ какъ степени функцій въ разсматриваемомъ случаѣ—попеременно четныя и нечетныя, то не трудно замѣтить, что оба послѣднихъ условія требуютъ, чтобы коэффиціенты при первыхъ членахъ функцій были бы всѣ одного знака и что этого достаточно.

§ 227. Разсмотримъ уравненіе:

$$x^3-2x-5=0;$$
$$V=x^3-2x-5,$$
$$V'=3x^2-2.$$

Чтобы составить V_2, нужно раздѣлить V на V'; умножая предва-

рительно V на 3, мы избѣгнемъ дробныхъ коэффиціентовъ и въ остаткѣ получимъ $-4x-15$; слѣдовательно,

$$V_2 = 4x + 15.$$

Далѣе, умножаемъ V' на 4 и дѣлимъ на V_2; остатокъ первой степени при этомъ дѣленіи также умножаемъ на 4: въ послѣднемъ остаткѣ получимъ 643; итакъ,

$$V_3 = -643.$$

При $x = -\infty$ функціи: V, V', V_2, V_3 дадутъ рядъ знаковъ: $- + -$, представляющій двѣ перемѣны. При $x = +\infty$ функціи дадутъ рядъ знаковъ: $+ + +$, представляющій только одну перемѣну. Отсюда заключаемъ, что предложенное уравненіе имѣетъ только одинъ вещественный корень.

§ 228. Какъ второе приложеніе теоремы, найдемъ условіе, при которомъ уравненіе:

$$x^3 + px + q = 0$$

имѣетъ всѣ три корня вещественные.

Имѣемъ:

$$V = x^3 + px + q,$$
$$V' = 3x^2 + p;$$

посредствомъ послѣдовательныхъ дѣленій получаемъ V_2 и V_3. Чтобы избѣжать дробей, умножаемъ дѣлимыя: при первомъ дѣленіи на 3, а при второмъ дѣленіи — на положительное количество $4p^2$. Получаемъ:

$$V_2 = -2px - 3q,$$
$$V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Когда x переходитъ отъ $-\infty$ къ $+\infty$, рядъ: V, V', V_2, V_3 долженъ потерять три перемѣны знака; поэтому, нужно, чтобы онъ далъ три перемѣны при $x = -\infty$ и ни одной при $x = +\infty$, а это значитъ, чтобы коэффиціенты у наивысшихъ степеней этихъ функцій, именно

$$1,\ 3,\ -2p,\ -4p^3\ \ 27q^2$$

были бы одного знака. Слѣдовательно, должны существовать неравенства:

$$p < 0,$$
$$4p^3 + 27p^2 < 0.$$

Это и есть тѣ условія, которыя получены раньше посредствомъ другихъ пріемовъ.

КОНСПЕКТЪ.

§ 220. Въ чемъ заключается теорема Штурма.—**§ 221.** Рядъ функцій, перечисленныхъ въ теоремѣ, теряетъ одну перемѣну, когда x, возрастая, проходитъ черезъ корень даннаго уравненія.—**§ 222.** Не происходитъ никакого измѣненія во всемъ числѣ перемѣнъ знака, когда x проходитъ черезъ корень одной изъ вспомогательныхъ функцій.—**§ 223.** Во время дѣйствій можно вводить или опускать положительныхъ численныхъ множителей.—**§ 224.** Случай, когда одинъ изъ предѣловъ есть корень предложеннаго уравненія.—**§ 225.** Случай, когда можно уменьшить число функцій.—**§ 226.** Условія, чтобы всѣ корни уравненія были вещественными.—**§§ 227** и **228.** Приложенія теоремы.

КНИГА IV.

Разности.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Понятія, вводимыя въ теорію разностей.

I Разности различныхъ порядковъ.

§ 229. Опредѣленіе разностей.—Если разсматривать рядъ чиселъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по какому-нибудь закону, то разности, полученныя отъ вычитанія каждаго изъ нихъ изъ непосредственно за нимъ стоящаго, образуютъ новый рядъ, члены котораго называются *разностями* членовъ перваго.

Такъ, напр., если данный рядъ представить въ видѣ:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n, \tag{1}$$

то рядъ разностей будетъ

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ \ldots,\ y_n-y_{n-1}; \tag{2}$$

(y_1-y_0) есть *разность* отъ y_0, (y_2-y_1) есть *разность* отъ y_1, ..., (y_n-y_{n-1}) есть *разность* отъ y_{n-1}. Чтобы составить разность отъ y_n, нужно дать еще одинъ членъ въ рядѣ (1), слѣдующій за y_n.

Для обозначенія разностей часто употребляютъ знакъ Δ.

Такъ, напр., Δy_k обозначаетъ разность $(y_{k+1}-y_k)$. По этому обозначенію члены ряда:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

будутъ имѣть разности:

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1}.$$

§ 230. Опредѣленіе вторыхъ разностей. — Разсматривая какой-нибудь данный рядъ чиселъ, замѣчаемъ, что ихъ разности образуютъ новый рядъ, имѣющій однимъ членомъ меньше, чѣмъ первый. Со вторымъ рядомъ можно поступить такъ же, какъ съ первымъ при составленіи разностей, т.-е. составить разности отъ разностей; эти новыя разности называются *вторыми разностями*. Ихъ обозначаютъ знакомъ Δ^2.

Такъ, напр., для даннаго ряда:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

первыя разности обозначаются посредствомъ

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1},$$

а вторыя разности.

$$\Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

посредствомъ

$$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y_{n-2}.$$

Этотъ новый рядъ, очевидно, имѣетъ однимъ членомъ меньше, чѣмъ предыдущій, и слѣдовательно, двумя членами меньше, чѣмъ данный.

§ 231. Опредѣленіе разностей какого-угодно порядка. — Если поступить съ рядомъ вторыхъ разностей такъ же, какъ съ даннымъ, то составятся разности отъ вторыхъ разностей, называемыя *третьими разностями;* онѣ обозначаются знакомъ Δ^3.

Такъ, напр., разности:

$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$$

обозначаются посредствомъ

$$\Delta^3 y_0,\ \Delta^3 y_1,\ \ldots,\ \Delta^3 y_{n-3}.$$

Такимъ образомъ можно продолжать неопредѣленно далеко, со-

ставляя разности четвертыя, пятыя, и т. д., обозначаемыя соотвѣтственно знаками: Δ^4, Δ^5, . . . ; число этихъ разностей зависитъ только отъ числа членовъ предложеннаго ряда. Такъ, напр., два члена даютъ только одну первую разность; составить вторыя разности уже нельзя. Три члена даютъ двѣ первыхъ разности и одну вторую; третьихъ же разностей составить нельзя. Вообще, m членовъ даютъ $(m-1)$ первыхъ разностей, $(m-2)$ вторыхъ разностей, . . . , одну $(m-1)$-ую разность; m-ыхъ разностей уже не будетъ. Если данный рядъ безпредѣленъ, то можно разсматривать разности какого-угодно порядка.

§ 232. Какъ при помощи разностей составляются квадраты. — Сначала покажемъ на двухъ простыхъ примѣрахъ, съ какою пользою могутъ быть примѣняемы разности.

Разсмотримъ рядъ квадратовъ натуральныхъ чиселъ:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ \ldots; \qquad (1)$$

составляемъ первыя разности:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ \ldots; \qquad (2)$$

составляемъ вторыя разности:

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots \qquad (3)$$

и видимъ, что всѣ онѣ равны между собою. Доказательство этого свойства настолько просто, что останавливаться на немъ мы не будемъ.

Составимъ теперь таблицу квадратовъ натуральныхъ чиселъ, пользуясь этимъ свойствомъ вторыхъ разностей. Для этого пишемъ прежде всего рядъ (2):

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots; \qquad (2)$$

далѣе, пишемъ первый членъ ряда квадратовъ, равный 1; зная же, что каждый квадратъ получается изъ предыдущаго посредствомъ прибавленія къ нему соотвѣтственнаго члена ряда (2), получаемъ искомый рядъ квадратовъ, разсуждая:

1 плюсъ 3 даютъ 4, 4 плюсъ 5 даютъ 9, 9 плюсъ 7 даютъ 16, и т. д.

§ 233. Какъ при помощи разностей составляются кубы.—Разсмотримъ рядъ кубовъ:

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729, \ldots; \qquad (1)$$

составляемъ первыя разности:

$$7,\ 19,\ 37,\ 61,\ 91,\ 127,\ 169,\ 217, \ldots; \qquad (2)$$

составляемъ вторыя разности:

$$12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48, \ldots \qquad (3)$$

наконецъ, составляемъ третьи разности:

$$6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6, \ldots \qquad (4)$$

и замѣчаемъ, что онѣ—постоянны и равны 6. Этотъ законъ общій. Въ самомъ дѣлѣ, четыре послѣдовательныхъ куба суть слѣдующіе:

$$a^3,\ (a+1)^3,\ (a+2)^3,\ (a+3)^3;$$

ихъ первыя разности будутъ:

$$3a^2+3a+1,\ 3(a+1)^2+3(a+1)+1,\ 3(a+2)^2+3(a+2)+1;$$

вторыя:

$$3[(a+1)^2-a^2]+3,\ 3[(a+2)^2-(a+1)^2]+3,$$

или, послѣ приведенія подобныхъ членовъ,

$$6a+6,\ 6(a+1)+6;$$

разность этихъ двухъ выраженій, представляющая третью разность, очевидно, равна 6.

Пользуясь этимъ свойствомъ, составляемъ послѣдовательно ряды: (4), (3) (2) и (1) посредствомъ простыхъ сложеній; послѣдній рядъ (1) и будетъ искомая таблица кубовъ. Дѣйствительно, написавъ рядъ (3) въ столбецъ, мы получимъ и второй рядъ, ставя первымъ его членомъ 7 и замѣчая, что каждый изъ остальныхъ его членовъ происходитъ отъ сложенія предыдущаго съ соотвѣтственнымъ членомъ ряда (3), т.-е. пишемъ:

12	7
18	19 = 12 + 7
24	37 = 18 + 19
30	61 = 24 + 37
36	91 = 30 + 61
42	127 = 36 + 91
48	169 = 42 + 127
54	217 = 48 + 169
60	271 = 54 + 217
66	331 = 60 + 271
72	397 = 66 + 331
78	469 = 72 + 397.

Составивъ такимъ образомъ рядъ (2), т.-е. первыя разности кубовъ, мы можемъ получить и самые кубы, зная, что каждый изъ нихъ происходитъ отъ сложенія предыдущаго съ соотвѣтственною разностью; иначе говоря, всѣ они могутъ быть выведены изъ перваго куба, равнаго 1, посредствомъ простыхъ сложеній. Дѣйствительно, написавъ полученныя выше первыя разности въ столбецъ, мы составляемъ рядъ кубовъ по таблицѣ:

7	1
19	8 = 7 + 1
37	27 = 19 + 8
61	64 = 37 + 27
91	125 = 61 + 64
127	216 = 91 + 125

. . . .

Обѣ предыдущія таблицы можно соединить въ одну слѣдующую:

Кубы.	Разности 1-го пор.	Разности 2-го пор.	Разности 3-го пор.
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	6
216	127	42	6
343	169	48	
512	217		
729			

При составленіи этой таблицы сначала пишемъ въ первомъ столбцѣ слѣва три первыхъ куба: 1, 8, 27; по нимъ вычисляемъ двѣ первыя разности, 7 и 19, которыя пишемъ во второмъ столбцѣ, эти послѣднія даютъ вторую разность 12—ее мы пишемъ въ третьемъ столбцѣ; наконецъ, въ четвертомъ столбцѣ пишемъ нѣсколько разъ третью разность, постоянную и равную 6. Послѣ этого складываемъ послѣднюю разность 6 съ разностью 12, стоящею слѣва, въ одной съ нею строкѣ,—получаемъ 18, затѣмъ разсуждаемъ такъ: 6 и 18 даютъ 24, 6 и 24 даютъ 30, и т. д.; такимъ образомъ у насъ составится третій столбецъ. Также получимъ и второй столбецъ: 18 и 19 даютъ 37, 24 и 37 даютъ 61. 30 и 61 даютъ 91, и т. д. Наконецъ, при помощи второго столбца вычисляемъ первый; при этомъ разсуждаемъ: 37 и 27 даютъ 64, 61 и 64 даютъ 125, 91 и 125 даютъ 216, и т. д.

Отсюда видно, что *всякое число таблицы равно суммѣ двухъ чиселъ. стоящаго надъ нимъ въ томъ же столбцѣ и стоящаго съ правой стороны этого послѣдняго въ слѣдующемъ столбцѣ.*

II. Формулы разностей.

§ 234. Выраженіе $\Delta^p u_0$ въ функціи отъ $u_0, u_1, u_2, \dots, u_p$.—Когда даны $(n+1)$ количествъ:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n,$$

то не представляется никакого затрудненія составить, по предыдущему, ихъ послѣдовательныя разности до n-го порядка включительно; мы, однако, не ограничимся указаніями, позволяющими выполнить эти вычисленія, а дадимъ общую формулу. Согласно опредѣленіямъ, мы можемъ написать:

$$\Delta u_0=u_1-u_0,\ \Delta u_1=u_2-u_1,\ \Delta u_2=u_3-u_2,\ \dots;$$
$$\Delta^2 u_0=\Delta u_1-\Delta u_0=u_2-2u_1+u_0,\ \Delta^2 u_1=\Delta u_2-\Delta u_1=u_3-2u_2+u_1,\ \dots;$$
$$\Delta^3 u_0=\Delta^2 u_1-\Delta^2 u_0=(u_3-2u_2+u_1)-(u_2-2u_1+u_0)=u_3-3u_2+3u_1-u_0,\ \dots$$

Не продолжая этихъ выкладокъ, можно уже замѣтить слѣдующій законъ:

Разность порядка p получается отъ умноженія: $u_p, u_{p-1}, \dots, u_0$ на коэффиціенты разложенія $(x-a)^p$.

Чтобы доказать общность этого закона, достаточно доказать, что

если онъ—справедливъ для разности какого-нибудь порядка, то онъ — справедливъ и для разности порядка непосредственно высшаго. Итакъ, пусть

$$\Delta^p u_0 = u_p - p u_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} u_{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} u_{p-3} + \ldots \pm u_0. \quad (1)$$

Эту формулу, выражающую разность p-го порядка отъ перваго члена какого-нибудь ряда въ функціи $(p+1)$ первыхъ его членовъ, мы можемъ приложить къ вычисленію $\Delta^p u_1$, разсматривая u_1, какъ первый членъ ряда:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_p,\ u_{p+1},\ \ldots,\ u_n;$$

очевидно, для этого достаточно въ формулѣ (1) на мѣсто u поставить u_1, на мѣсто u_1 поставить u_2, ..., т.-е. увеличить всѣ указатели на единицу. Слѣдовательно, *въ силу той же самой формулы*, мы можемъ написать:

$$\Delta^p u_1 = u_{p+1} - p u_p + \frac{p(p-1)}{1.2} u_{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} u_{p-2} + \ldots \quad (2)$$

Вычитая равенство (1) изъ равенства (2), получаемъ:

$$\Delta^{p+1} u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0 = u_{p+1} - (p+1) u_p + \left[\frac{p(p-1)}{1.2} + p\right] u_{p-1} -$$
$$- \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} + \frac{p(p-1)}{1.2}\right] u_{p-2} + \ldots$$

Зная же, что сумма двухъ послѣдовательныхъ коэффиціентовъ разложенія бинома образуетъ коэффиціентъ разложенія степени непосредственно высшей (**§ 46**), мы предыдущую формулу переписываемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta^{p+1} u_0 = u_{p+1} - (p+1) u_p + \frac{(p+1)p}{1.2} u_{p-1} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} u_{p-2} + \ldots$$

Это и требовалось доказать.

§ 235. Выраженіе u_p въ функціи отъ u_0 и отъ p его послѣдовательныхъ разностей.—Обратно, если даны u_0 и n его послѣдовательныхъ разностей, $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^n u_0$, то можно послѣдовательно вычислить члены: $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Здѣсь, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы дадимъ общую формулу, къ которой приводитъ подобное вычисленіе. По опредѣленію имѣемъ:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0, \\
u_2 &= u_1 + \Delta u_1 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \\
u_3 &= u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 = \\
&= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + (\Delta u_0 + \Delta^2 u_0) + (\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0) = \\
&= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0
\end{aligned}$$

и замѣчаемъ непосредственно слѣдующій законъ:

Членъ u_p, занимающій $(p+1)$-ое мѣсто, получается отъ умноженія u_0 и его послѣдовательныхъ разностей: Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ..., $\Delta^p u_0$ на коэффиціенты разложенія $(x+a)^p$.

Чтобы доказать общность этого закона, достаточно такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, доказать, что если онъ—справедливъ для какого-нибудь члена, то онъ — справедливъ и для члена, непосредственно за нимъ слѣдующаго. Итакъ, пусть

$$u_p = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^p u_0. \qquad (1)$$

Эта формула даетъ $(p+1)$-ый членъ какого-угодно ряда: u_0, u_1, u_2, ..., u_p въ функціи отъ перваго члена и его p послѣдовательныхъ разностей; слѣдовательно, примѣняя *ту же самую формулу* къ ряду:

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \ldots,\ \Delta u_p,$$

мы получимъ $(p+1)$-ый членъ Δu_p въ функціи отъ перваго члена Δu_0, и его p послѣдовательныхъ разностей, равныхъ, очевидно, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ..., $\Delta^{p+1} u_0$, т.-е. получимъ:

$$\Delta u_p = \Delta u_0 + p\Delta^2 u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0; \qquad (2)$$

послѣдняя формула получается изъ (1) посредствомъ увеличенія на единицу указателей при Δ. Складываемъ, теперь, формулы (1) и (2):

$$u^{p+1} = u_p + \Delta u_p = u_0 + (p+1)\Delta u_0 + \left[\frac{p(p-1)}{1.2} + p\right]\Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^{p+1} u_0;$$

а такъ какъ сумма двухъ послѣдовательныхъ коэффиціентовъ степени p бинома равна коэффиціенту степени $(p+1)$ (§ 46), то

$$u_{p+1} = u_0 + (p+1)\Delta u_0 + \frac{(p+1)p}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

Это и требовалось доказать.

III. Разности отъ многочленовъ.

§ 236. Мы видѣли (**§§ 232** и **233**), что вторыя разности ряда квадратовъ натуральныхъ чиселъ и третьи разности ряда кубовъ тѣхъ же чиселъ равны постоянной величинѣ. Это предложеніе распространяется на разности четвертаго порядка ряда четвертыхъ степеней, на разности пятаго порядка ряда пятыхъ степеней, и т. д. Не останавливаясь на этихъ предложеніяхъ, мы докажемъ слѣдующую теорему, изъ которой они выводятся, очевидно, какъ частные случаи.

Теорема.—*Если въ многочленъ относительно x степени m, подставить вмѣсто x рядъ чиселъ въ ариѳметической прогрессіи, то m-ыя разности полученныхъ результатовъ будутъ постоянныя величины.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ данъ многочленъ:

$$y = F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m. \quad (1)$$

Подставляемъ вмѣсто x послѣдовательныя значенія

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots,\ x_0+nh$$

и соотвѣтственныя значенія y обозначаемъ черезъ

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Всѣ эти значенія, очевидно, многочлены относительно x_0, степени m, коэффиціенты которыхъ зависятъ отъ h; дѣйствительно,

$$F(x_0+ph) = F(ph+x_0) = F(ph) + F'(ph)x_0 + \frac{F''(ph)}{1.2}x_0^2 + \ldots + \frac{F^m(ph)}{1.2\ldots m}x_0^m.$$

Кромѣ того ясно, что для перехода отъ одного изъ этихъ значеній къ слѣдующему, достаточно въ немъ замѣнить x_0 суммою (x_0+h), въ чемъ не трудно, впрочемъ, убѣдиться, разсматривая два послѣдовательныхъ значенія y, y_p и y_{p+1}:

$$y_p = F(x_0+ph),\quad y_{p+1} = F[x_0+(p+1)h];$$

очевидно, что $[x_0+(p+1)h]$ можетъ быть получено изъ выраженія (x_0+ph) посредствомъ замѣны въ немъ x_0 суммою (x_0+h).

Послѣ этихъ замѣчаній можно сказать, что первыя разности: $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots$ суть многочлены $(m-1)$-ой степени относительно x_0, коэффиціенты которыхъ зависятъ отъ h; въ самомъ дѣлѣ,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)h + F''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

но такъ какъ извѣстно, что $F'(x_0)$ есть многочленъ $(m-1)$-ой степени, $F''(x_0)$—многочленъ $(m-2)$-ой степени, и т. д., то наше предложеніе доказано для Δy_0. Отсюда вытекаетъ, что оно справедливо и для слѣдующихъ разностей: $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots$, потому что каждая изъ нихъ выводится изъ предыдущей посредствомъ замѣны x_0 на (x_0+h), отъ чего ихъ степень относительно x_0 не измѣнится. Итакъ, рядъ:

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n, \ldots \tag{2}$$

можетъ быть полученъ посредствомъ послѣдовательной подстановки на мѣсто x въ нѣкоторый многочленъ $(m-1)$-ой степени значеній: $x_0,\ x_0+h, \ldots$

Если, теперь, мы приложимъ къ этому ряду то, что сказано о рядѣ:

$$y_0,\ y_1, \ldots, y_n,$$

выведенномъ тѣмъ же путемъ изъ нѣкотораго многочлена m-ой степени, то увидимъ, что разности членовъ ряда (2), т.-е.

$$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^2 y_n, \tag{3}$$

суть многочлены $(m-2)$-ой степени относительно x_0 и что каждый изъ нихъ выводится изъ предыдущаго посредствомъ замѣны x_0 суммою (x_0+h), или, что одно и то же, каждый изъ нихъ можетъ быть выводимъ изъ одного и того же многочлена посредствомъ замѣны x черезъ $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h, \ldots$

Прилагая къ ряду вторыхъ разностей все ту же теорему, увидимъ, что разности членовъ ряда (3), т.-е.

$$\Delta^3 y_0,\ \Delta^3 y_1, \ldots, \Delta^3 y_n, \tag{4}$$

суть многочлены $(m-3)$-ей степени относительно x_0.

Разсуждая такимъ же образомъ и далѣе, заключаемъ, что четвертыя разности суть многочлены $(m-4)$-ой степени, пятыя раз-

ности—многочлены $(m-5)$-ой степени, . . . и, наконецъ, m-ыя разности—нулевой степени, т.-е. не зависятъ отъ x_0, что и требовалось доказать. Дѣйствительно, чтобы получить каждую изъ этихъ послѣднихъ разностей, должно измѣнить въ предыдущей x_0 на x_0+h, а такъ какъ онѣ не содержатъ x_0, то и являются постоянными величинами.

§ 237. Замѣчанія.—Возвращаясь къ подробностямъ предыдущаго доказательства, можно сдѣлать нѣсколько полезныхъ замѣчаній.

Замѣчаніе I.—Мы нашли формулу:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = F(x_0+h) - F(x_0) =$$
$$= F'(x_0)h + F''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + F^m(x_0)\frac{h^m}{1.2\ldots m}; \qquad (1)$$

во второй ея части приращеніе h является множителемъ, это h останется множителемъ и тогда, когда x будетъ замѣнено суммами: (x_0+h), (x_0+2h), . . . при составленіи разностей: Δy_1, Δy_2, . . . Это значитъ, что всѣ первыя разности содержатъ множителемъ приращеніе h.

Замѣчаніе II.—Очевидно, что если бы данный многочленъ $F(x)$ имѣлъ бы множителемъ h, то этотъ множитель вошелъ бы и въ послѣдовательныя производныя: $F'(x)$, $F''(x_0)$, . . . , $F^m(x_0)$; слѣдовательно, всѣ члены разности содержали бы множителемъ не только h, но h^2. Отсюда вытекаетъ, что такъ какъ первая разность есть многочленъ, содержащій множитель h, то вторая разность будетъ содержать множитель h^2, общій для всѣхъ членовъ. Вообще, формула (1) показываетъ, что если многочленъ $F(x)$ содержитъ множителемъ нѣкоторую степень h^p отъ h, то его разность будетъ содержать множителемъ, общимъ для всѣхъ членовъ, h^{p+1}. На основаніи этого разности отъ вторыхъ разностей, т.-е. третьи разности, будутъ имѣть множителемъ h^3; четвертыя разности будутъ имѣть множителемъ h^4, и т. д.

Отсюда видно, что если приращеніе h все болѣе и болѣе уменьшается то разности будутъ уменьшаться тѣмъ быстрѣе, чѣмъ ихъ порядокъ выше.

Замѣчаніе III.—Общее выраженіе для Δy_0,

$$\Delta y_0 = F'(x_0)h + F''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

есть, какъ мы сказали, многочленъ $(m-1)$-ой степени, который можно расположить по степенямъ x_0. Если Ax^m представляетъ пер-

вый членъ $F(x)$, то легко замѣтить, что первымъ членомъ Δy_0 будетъ первый членъ $F'(x_0)h$, т.-е. $mAx^{m-1}h$, и что, слѣдовательно, Δy_0, Δy_1, Δy_2, . . . получатся послѣ подстановки на мѣсто x значеній: x_0, (x_0+h), (x_0+2h), . . . въ многочленъ, первый членъ котораго есть $mhAx^{m-1}$. Прилагая къ этому многочлену результатъ, выведенный для $F(x)$, найдемъ, что первыя разности отъ этого многочлена, т.-е. вторыя разности отъ $F(x)$, могутъ быть получены подстановкою на мѣсто x значеній: x_0, (x_0+h), . . . въ многочленъ, первый членъ котораго есть $m(m-1)Ah^2x^{m-2}$. Точно такъ же первый членъ многочлена, дающаго третьи разности, есть $m(m-1)(m-2)Ah^3x^{m-3}$. Наконецъ, m-ая разность, представляющая всего одинъ членъ, потому что она не зависитъ отъ x_0, есть

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 2Ah^m.$$

Многочлены относительно x, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, называются разностями: первою, второю, третьею, . . . m-ою отъ многочлена $F(x)$ и обозначаются символами: Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, . . . , $\Delta^m y$.

§ 238. Приложеніе къ многочлену третьей степени. — Если мы въ многочленѣ третьей степени:

$$y = x^3 + px^2 + qx + r \tag{1}$$

замѣнимъ x суммою $(x+h)$ и изъ результата вычтемъ (1), то получимъ:

$$\Delta y = 3x^2h + (3h^2 + 2ph)x + h^3 + ph^2 + qh; \tag{2}$$

точно такъ же, подставляя $(x+h)$ на мѣсто x въ выраженіи (2) и затѣмъ вычитая это послѣднее изъ результата подстановки, находимъ:

$$\Delta^2 y = 6xh^2 + 6h^3 + 2ph^2, \tag{3}$$

наконецъ, поступая такимъ же образомъ съ выраженіемъ (3), находимъ:

$$\Delta^3 y = 6h^3. \tag{4}$$

Чтобы получить значенія Δy_0, Δy_1, Δy_2, . . . ; $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1$, . . . достаточно на мѣсто x подставить во второй части формулъ: (2) и (3) x_0, (x_0+h), и т. д.

Для составленія численныхъ значеній функціи y и ея разностей нужно поступить такъ, какъ указано при составленіи таблицы кубовъ.

§ 239. Примѣръ.—Пусть, напр., данъ многочленъ:

$$y=x^3-5x^2+6x-1.$$

Составляемъ значенія, которыя принимаетъ этотъ многочленъ при цѣлыхъ значеніяхъ перемѣнной; полагая послѣдовательно $x=-1$, $x=0$, $x=1$, находимъ соотвѣтственныя значенія y: $y=-13$, $y=-1$, $y=1$, первыя разности отъ которыхъ суть 12 и 2, а вторая разность—10. Что касается третьей разности отъ y, то мы знаемъ, что она равна 6. Пишемъ эти результаты въ видѣ слѣдующей таблицы:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
				6
−1	−13	12	−10	6
0	− 1	2		6
+1	+ 1			6

Далѣе, заполняемъ различные столбцы, замѣчая, что каждый членъ какого-угодно изъ нихъ, исключая перваго столбца, равенъ суммѣ членовъ: стоящаго непосредственно надъ нимъ и соотвѣтственнаго этому послѣднему въ столбцѣ справа. Это замѣчаніе, очевидно, даетъ возможность продолжить столбцы въ двухъ направленіяхъ; находимъ:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−5	−281	112	−34	6
−4	−169	78	−28	6
−3	−91	50	−22	6
−2	−41	28	−16	6
1	13	12	−10	6
0	−1	2	− 4	6
1	+1	− 2	+ 2	6
2	1	0	+ 8	6
3	−1	8	+14	
4	+7	22		
5	+29			

Сначала, чтобы продолжить столбецъ вторыхъ разностей къ низу, разсуждаемъ: $-10+6$ даютъ -4, $-4+6$ даютъ 2, $+2+6$ даютъ 8,

и т. д. Такъ же продолжаемъ столбецъ первыхъ разностей при помощи предыдущаго, разсуждая: $-4+2$ даютъ -2, $+2-2$ даютъ 0. $8+0$ даютъ 8, и т. д. Такъ же продолжаемъ рядъ значенiй y, соотвѣтствующихъ значенiямъ x, равнымъ 2, 3, 4, . . . , разсуждая: $2+1$ даютъ -1, $0-1$ даютъ -1, $8-1$ даютъ 7, и т. д.

Чтобы продолжить тѣ же столбцы къ верху, замѣчаемъ, что всякiй членъ столбца есть разность между членомъ, стоящимъ непосредственно подъ нимъ въ томъ же столбцѣ, и членомъ, стоящимъ надъ этимъ послѣднимъ справа, въ слѣдующемъ столбцѣ. Такимъ образомъ, продолжаемъ сначала столбецъ $\Delta^2 y$, разсуждая: $-10-6$ даютъ -16, $-16-6$ даютъ -22, $-22-6$ даютъ -28, и т. д. Затѣмъ, продолжаемъ при помощи этого послѣдняго столбца столбецъ Δy, разсуждая: $12-(-16)$ даютъ 28, $28-(-22)$ даютъ 50, и т. д. Наконецъ, продолжаемъ рядъ значенiй y, разсуждая: $-13-28$ даютъ -41, $-41-50$ даютъ -91, и т. д.

§ 240. Замѣчанiе. — На предыдущемъ примѣрѣ видно, что для вычисленiя значенiй многочлена третьей степени, соотвѣтствующихъ цѣлымъ значенiямъ перемѣнной, достаточно знать значенiя, соотвѣтствующiя тремъ цѣлымъ послѣдовательнымъ числамъ: -1, 0, $+1$; дѣйствительно, такъ какъ разность третьяго порядка — постоянна, то весьма легко получить слѣдующiя значенiя посредствомъ простыхъ сложенiй.

Если данный многочленъ — четвертой степени, то постоянною была бы разность четвертаго порядка; и чтобы составить рядъ его значенiй, достаточно было бы знать четыре послѣдовательныхъ значенiя. Ихъ потребовалось бы пять для многочлена пятой степени, и т. д. Вообще, нужно было бы знать m значенiй для многочлена m-ой степени.

IV. Разности отъ функцiй.

§ 241. Опредѣленiе. — Пусть будетъ дана какая-нибудь функцiя $y=F(x)$. Выраженiе

$$\Delta y=\Delta F(x)=F(x+h)-F(x),$$

гдѣ x есть одно изъ значенiй, приписываемыхъ x, и $(x+h)$ слѣдующее за этимъ значенiе, называется *первою разностью* отъ $F(x)$.

Точно такъ же, при замѣнѣ x суммою $(x+h)$ въ $\Delta F(x)$, разность:

$$\Delta^2 y = \Delta^2 F(x) = \Delta F(x+h) - \Delta F(x)$$

называется *второю разностью* отъ $F(x)$; и т. д.

Примѣръ.—Дано:

$$y = a^x.$$

Составляемъ:

$$\Delta y = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Отсюда видно, что первая разность отъ данной функціи есть произведеніе этой послѣдней на постоянную величину $(a^h - 1)$; слѣдовательно,

$$\Delta^2 y = a^x(a^h - 1)^2,\ \Delta^3 y = a^x(a^h - 1)^3, \ldots,\ \Delta^n y = a^x(a^h - 1)^n.$$

V. Составленіе численныхъ таблицъ при помощи разностей.

§ 242. Численныя таблицы. — Разности весьма полезны при составленіи таблицъ всякаго рода. Въ самомъ дѣлѣ, въ каждомъ почти рядѣ чиселъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по опредѣленному закону и достаточно сближенныхъ между собою, разности все болѣе и болѣе стремятся стать равными по мѣрѣ того, какъ ихъ порядокъ повышается. Пренебрегая весьма малыми величинами, можно, начиная съ нѣкотораго порядка, считать разности, въ извѣстномъ промежуткѣ, равными постоянной величинѣ и составить таблицу въ томъ предположеніи, что дѣло идетъ о значеніяхъ многочлена.

Мы не можемъ выяснить здѣсь значенія этого общаго положенія и ограничимся тѣмъ, что разовьемъ его на двухъ примѣрахъ.

§ 243. Примѣръ I.—Полагая

$$y = \log x,$$

составляемъ:

$$\Delta y = \log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

или

$$\Delta y = \log e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} + \ldots\right).$$

Далѣе,

$$\Delta^2 y = \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x =$$
$$= \log(x+2h) - \log x - 2[\log(x+h) - \log x] =$$
$$= \log\left(1+\frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

или

$$\Delta^2 y = -\log e\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\right).$$

Далѣе,

$$\Delta^3 y = \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x =$$
$$= \log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

или

$$\Delta^3 y = \log e\left(\frac{2h^3}{x^3} - \ldots\right).$$

Напр., при $x = 10000$ и $h = 1$

$$\Delta y = 0{,}000043427276863,$$
$$\Delta^2 y = -0{,}000000004342076,$$
$$\Delta^3 y = 0{,}000000000000868;$$

если при этомъ требуется получить результаты съ десятью цифрами послѣ запятой, то можно пренебречь разностями уже четвертаго порядка и поступать такъ, какъ будто бы разность третьяго порядка постоянна. Итакъ, составляютъ послѣдовательно разности третьяго, второго, перваго порядка, такъ же, какъ въ **§ 239**-омъ; отсюда выводятъ логариѳмы чиселъ: 10001, 10002, 10003, исходя изъ логариѳма 10000, равнаго 4,000000000000000. Результаты нужно провѣрять посредствомъ логариѳмовъ, вычисляемыхъ непосредственно, черезъ болѣе или менѣе большіе промежутки. Методъ разностей долженъ ихъ дать съ желаемою степенью точности, т.-е. съ извѣстнымъ числомъ вполнѣ точныхъ цифръ послѣ запятой. Когда послѣдняя изъ этихъ цифръ перестанетъ быть точною, то вычисляютъ снова, *à priori*, посредствомъ формулъ (**§ 243**) разности: Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ и этими новыми значеніями пользуются такъ же, какъ предыдущими.

§ 244. Примѣръ II.—Требуется вычислить съ 7 точными цифрами послѣ запятой таблицу логариѳмовъ синусовъ черезъ каждыя 10 секундъ отъ 72° до 72°1′30″.

Мы знаемъ, что

$$\sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}9510565,$$

$$\cos 72^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0{,}3090170;$$

беря логариѳмы отъ этихъ двухъ значеній и прибавляя, какъ принято, къ каждому изъ нихъ по десяти единицъ, получаемъ:

$$\log\sin 72^0 = 9{,}9782063255,$$
$$\log\cos 72^0 = 9{,}4899824.$$

Полагаемъ въ предыдущихъ формулахъ:

$$y = \log x,$$
$$\Delta y = \log e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \ldots\right),$$
$$\Delta^2 y = -\log e\left(\frac{h^2}{x^2} - \ldots\right)$$

$x = \sin\varphi$, при чемъ φ въ нашемъ примѣрѣ равно 72^0. Опредѣляемъ теперь приращеніе h синуса, соотвѣтствующее приращенію угла на $10''$. Пишемъ:

$$h = \sin(\varphi+10'') - \sin\varphi,$$
$$\sin(\varphi+10'') = \sin\varphi.\cos 10'' + \cos\varphi.\sin 10''.$$

Зная же, что дуга въ $10'' = \frac{\pi\times 10}{180.60.60} = 0{,}00004\ 84813681\ \ldots < \frac{5}{10^5}$, заключаемъ, что такъ какъ

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

то синусъ $10''$ отличается отъ своей дуги на количество, меньшее, чѣмъ $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{10^5}\right)^3$, или меньше, чѣмъ на $\frac{1}{10^{13}}$. Также, зная, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, выводимъ, что косинусъ $10''$ отличается отъ единицы меньше, чѣмъ на $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10^5}\right)^2$, или меньше, чѣмъ на единицу девятаго порядка. Поэтому, въ значеніи $\sin(\varphi+10'')$ можно $\cos 10''$ замѣнить 1 и $\sin 10''$—дугою въ $10''$, т.-е. написать:

$$\sin(\varphi+10'') = \sin\varphi + \cos\varphi \times \operatorname{arc} 10'',$$

слѣдовательно, съ приближеніемъ до $\frac{1}{10^5}$,

$$h = \cos\varphi \times \operatorname{arc} 10''.$$

Уголъ φ равенъ 72^0; итакъ, пренебрегая h^2, получаемъ:

$$\Delta y = \log e \frac{\cos 72^0 \times \operatorname{arc} 10''}{\sin 72^0};$$

логариѳмируемъ это выраженіе:

$$\begin{aligned} \log(\log e) &= \bar{1},637\ 7843 \\ \log\cos 72^0 &= \bar{1},489\ 9824 \\ \log 10'' &= \bar{5},685\ 5749 \\ \text{Доп.}\log\sin 72^0 &= 0,021\ 7937; \end{aligned}$$

складывая, находимъ: $\log\Delta y = \bar{6},835\ 1353,$

откуда $\Delta y = 0,000\ 0068412.$

Такъ какъ мы вычисляемъ значенія $\log\sin\varphi$ съ 7 точными цифрами послѣ запятой, то значенія $\frac{h^2}{x^2}$, $\frac{h^3}{x^3}$ и, слѣдовательно, значеніе $\Delta^2 y$ не вліяютъ уже на искомый результатъ; значитъ, трансцендентная функція $\log\sin\varphi$ въ указанныхъ предѣлахъ можетъ быть разсматриваема, какъ алгебраическая функція первой степени, увеличивающаяся приблизительно на $\frac{68}{10^7}$ при каждомъ увеличеніи угла φ на $10''$.

Для полной увѣренности въ точности конечнаго результата нужно составить ариѳметическую прогрессію, первый членъ которой равенъ

$$\log\sin 72^0 = \bar{1},978\ 20632\ \ldots$$

и разность которой есть 684 стомилліонныхъ, вычисляя каждый ея членъ съ 8 цифрами послѣ запятой. Итакъ, ограничиваясь четырьмя послѣдними цифрами логариѳмовъ, пишемъ прогрессію:

0632, 1316, 2000, 2684, 3368, 4052, 4736, 5420, 6104, 6788.

Опуская послѣднюю цифру и прибавляя единицу седьмого порядка, если отбрасываемая цифра больше 5, получаемъ:

$$\log\sin 72^\circ 0' \ 0'' = 1,978\ 2063$$
$$\log\sin 72^\circ 0' 10'' = 1,978\ 2132$$
$$\log\sin 72^\circ 0' 20'' = 1,978\ 2200$$
$$\log\sin 72^\circ 0' 30'' = 1,978\ 2268$$
$$\log\sin 72^\circ 0' 40'' = 1,978\ 2337$$
$$\log\sin 72^\circ 0' 50'' = 1,978\ 2405$$
$$\log\sin 72^\circ 1' \ 0'' = 1,978\ 2474$$
$$\log\sin 72^\circ 1' 10'' = 1,978\ 2542$$
$$\log\sin 72^\circ 1' 20'' = 1,978\ 2610$$
$$\log\sin 72^\circ 1' 30'' = \bar{1},978\ 2679.$$

Совершенно такія же значенія мы находимъ по таблицамъ Каллета.

КОНСПЕКТЪ.

§ 229. Опредѣленіе разностей. **§ 230.** Опредѣленіе вторыхъ разностей. — **§ 231.** Опредѣленіе разностей какого-угодно порядка.— **§ 232.** Какъ при помощи разностей составляются квадраты.— **§ 233.** Какъ при помощи разностей составляются кубы.— **§ 234.** Формула для разности какого-угодно порядка.— **§ 235.** Обратная формула, выражающая какой-нибудь членъ ряда черезъ первый членъ и его послѣдовательныя разности.— **§ 236** Разность m-го порядка многочлена m-ой степени постоянна.— **§ 237.** Первыя разности содержатъ множителемъ приращеніе h перемѣнной; вторыя разности содержатъ множителемъ h^2; третьи разности содержатъ множителемъ h^3, и т. д. Выраженіе m-ой разности. **§ 238.** Приложеніе къ многочлену третьей степени.— **§ 239.** Примѣръ.— **§ 240.** Для вычисленія значеній многочлена m-ой степени, соотвѣтствующихъ цѣлымъ значеніямъ перемѣнной, достаточно знать значенія, соотвѣтствующія m цѣлымъ послѣдовательнымъ числамъ. **§ 241.** Разности отъ функцій. **§ 242.** Численныя таблицы.— **§§ 243** и **244** Приложенія къ составленію таблицъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Найти, при помощи разностей, сумму квадратовъ, сумму кубовъ, и т. д. p первыхъ цѣлыхъ чиселъ.

Прилагають формулу § 235-го, полагая $u_p = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + p^n$.

II. Вычислить значенія многочлена:

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 8$$

при цѣлыхъ значеніяхъ перемѣнной.

III. Данъ рядъ:

$$\varphi(x),\ \varphi(x+h),\ \varphi(x+2h),\ \ldots,\ \varphi(x+nh),$$

гдѣ $\varphi(x)$ обозначаетъ какую-угодно функцію отъ перемѣнной. Показать, что дроби:

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{h}, \quad \frac{\Delta^2\varphi(x)}{h^2}, \quad \frac{\Delta^3\varphi(x)}{h^3}, \ldots$$

имѣютъ соотвѣтственно предѣлами производныя перваго, второго, третьяго порядка отъ $\varphi(x)$. Отсюда выводится, что при маломъ h разности, вообще, тѣмъ меньше, чѣмъ ихъ порядокъ выше.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Интерполированіе.

I. Въ чемъ состоитъ интерполированіе.

§ 245. Опредѣленіе. — Интерполированіе заключается въ томъ, чтобы между членами нѣкотораго ряда вставить новые, подчиненные тому же закону, что и прежніе. Эта задача иногда очень легка, если извѣстенъ законъ составленія членовъ ряда. Такъ, напр., между двумя членами какой-нибудь прогрессіи можно вставить данное число среднихъ (ариѳметическихъ или геометрическихъ) по очень простому правилу. Наоборотъ, если разсматривать такія числа, законъ составленія которыхъ неизвѣстенъ, то задача интерполированія является совершенно неопредѣленною, и чтобы рѣшить ее, нужно неизвѣстные члены подчинить какому-нибудь условію, при которомъ неопредѣленность исчезнетъ. Чаще всего за такое условіе принимается, чтобы *разности нѣкотораго порядка равнялись бы нулю.* Примѣромъ можетъ служить опредѣленіе логариѳмовъ чиселъ, не находящихся въ таблицахъ; въ самомъ дѣлѣ, обычное допущеніе, что приращеніе логариѳмовъ пропорціонально приращенію чиселъ, ведетъ къ допущенію, что при равныхъ приращеніяхъ чиселъ приращенія логариѳмовъ также равны, или, другими словами, что первая разность отъ логариѳмовъ постоянна и, слѣдовательно, вторая равна нулю. Въ случаѣ логариѳмовъ можно, впрочемъ, убѣдиться изъ таблицъ, что такое допущеніе почти справедливо для приращеній чиселъ, равныхъ единицѣ; отсюда заключаютъ, что оно *и подавно (à fortiori)* справедливо для меньшихъ приращеній; между прочимъ, мы показали (**§ 243**), что вторыя разности отъ логариѳмовъ

уменьшаются весьма быстро. Этотъ законъ прилагается, конечно, ко всѣмъ функціямъ; значитъ, когда равномѣрныя приращенія перемѣнной становятся все меньше и меньше, разности отъ функціи уменьшаются тѣмъ быстрѣе, чѣмъ порядокъ ихъ выше. Слѣдовательно, если при составленіи какой-нибудь таблицы будетъ замѣчено, что разности нѣкотораго порядка почти исчезаютъ, то можно допустить, что *и подавно (a fortiori)* будетъ то же при меньшихъ приращеніяхъ.

Итакъ, задача интерполированія можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

Даны значенія: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ нѣкоторой функціи, соотвѣтствующія значеніямъ: $x_0, x_0+h, x_0+2h, \ldots, x_0+nh$ перемѣнной; допуская, что $(n+1)$-ыя разности отъ функціи при какихъ-угодно равномѣрныхъ приращеніяхъ x равны нулю, найти значенія этой функціи, соотвѣтствующія данному значенію x, взятому между x_0 и x_0+nh.

II. Формулы интерполированія.

§ 246. Формула Ньютона.—Вернемся къ формулѣ:

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n-1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0, \qquad (1)$$

доказанной въ § 235-омъ.

Предположимъ, что послѣднее значеніе x, для котораго u извѣстно, есть x_1, такъ что

$$x_1 = x_0 + nh$$

и, слѣдовательно,

$$n = \frac{x_1 - x_0}{h};$$

въ такомъ случаѣ формула (1) приметъ видъ:

$$u_n = u_0 + \frac{x_1-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x_1-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \\ + \ldots + \frac{\left(\frac{x_1-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x_1-x_0}{h}-n+1\right)}{1.2.3\ldots n}\Delta^n u_0. \qquad (2)$$

Если во второй части этой формулы замѣнить x_1 неопредѣленною буквою x, то образуется нѣкоторая функція $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0, \quad (3)$$

обращающаяся, очевидно, въ u_n при $x=x_1$, или, что одно и то же, при $x=x_0+nh$. Кромѣ того, если придать перемѣнной x значенія: x_0, x_0+h, x_0+2h, . . . , $x_0+(n-1)h$, то $\varphi(x)$ приметъ послѣдовательно значенія: u_0, u_1, u_2, . . . , u_{n-1}. Наконецъ, эта функція есть многочленъ n-ой степени, n-ая разность отъ котораго постоянна (§ 236). Итакъ, она удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ, поставленнымъ въ заданіи, и, слѣдовательно, представляетъ рѣшеніе предложенной задачи. Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ въ $\varphi(x)$

$$x = x_0 + ph,$$

откуда могутъ получиться всѣ другія значенія, если приравнивать произвольное число p послѣдовательно 0, 1, . . . , n; находимъ:

$$\varphi(x_0+ph) = u_0 + p\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p u_0; \quad (4)$$

дальнѣйшіе члены исчезаютъ, потому что $\frac{x-x_0}{h}$ равно p и, слѣдовательно, каждый изъ членовъ, начиная съ $(p+1)$-го, имѣетъ въ числителѣ множитель $(p-p)$. Вторая же часть формулы (4) представляетъ выраженіе u_p (§ 235); поэтому функція $\varphi(x)$, какъ мы уже и говорили, равняется u_p при $x=x_0+ph$ и удовлетворяетъ условіямъ заданія.

§ 247. Замѣчаніе I.—Въ формулѣ:

$$u_n = u + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0$$

мы оставляли несокращенными коэффиціенты послѣднихъ членовъ;

такъ, напр., коэффиціентъ при $\Delta^n u_0$ послѣ сокращенія равенъ единицѣ, но мы удерживаемъ

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n},$$

потому что послѣ подстановки $\frac{x-x_0}{h}$ въ числителѣ вмѣсто n мы получимъ многочленъ, весьма отличающійся отъ единицы.

§ 248. Замѣчаніе II. — Функція $\varphi(x)$ (§ 246) есть единственный многочленъ относительно x, который можетъ рѣшить задачу такъ, какъ она предложена. Въ самомъ дѣлѣ, $(n+1)$-ая разность должна быть нулемъ по одному изъ условій; слѣдовательно, искомый многочленъ не можетъ имѣть членовъ степени выше n-ой. Кромѣ того, такой многочленъ долженъ принимать тѣ же самыя значенія, что и $\varphi(x)$, именно $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ при $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$; поэтому, если обозначить его черезъ $\psi(x)$, то необходимо, чтобы разность $\varphi(x) - \psi(x)$ обращалась въ нуль $(n+1)$ разъ, или, другими словами, чтобы уравненіе:

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0$$

имѣло бы, по крайней мѣрѣ, $(n+1)$ корней: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, откуда вытекаетъ, что такъ какъ оно n-ой степени, то первый его членъ долженъ быть тождественно равенъ нулю и, слѣдовательно, функціи φ и ψ должны быть тождественны.

§ 249. Примѣръ.—Приложимъ предыдущій методъ къ примѣру. Пусть требуется получить логариѳмъ числа 3,1415926536 посредствомъ таблицы десятичныхъ логариѳмовъ. Принимаемъ логариѳмы, содержащіеся въ этой таблицѣ, за данныя значенія функціи u, а соотвѣтственныя числа—за данныя значенія перемѣнной x, и пишемъ слѣдующую таблицу:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
3,14	0,4969296481	0,0013809057	—0,0000043769	0,0000000277	—0,0000000003
3,15	0,4983105538	0,0013765288	—0,0000043492	0,0000000274	
3,16	0,4996870826	0,0013721796	—0,0000043218		
3,17	0,5010592622	0,0013678578			
3,18	0,5024271200				

Такъ какъ разность четвертаго порядка здѣсь очень мала, то разность пятаго порядка можно принять за нуль. Чтобы воспользоваться формулою (3):

$$u_x = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 +$$
$$+ \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 +$$
$$+ \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-3\right)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0,$$

мы должны положить:

$$u_0 = 0{,}4969296481,$$
$$\Delta u_0 = 0{,}0013809057,$$
$$\Delta^2 u_0 = -0{,}0000043769,$$
$$\Delta^3 u_0 = 0{,}0000000277,$$
$$\Delta^4 u_0 = 0{,}0000000003;$$

замѣчая же, что

$$h = 0{,}01;\ x = 3{,}14;\ x - x_0 = 0{,}0015926536,$$

получимъ:

$$\frac{x-x_0}{h} = 0{,}15926536;\quad \frac{\frac{x-x_0}{h}-1}{2} = -0{,}42036732;$$
$$\frac{\frac{x-x_0}{h}-2}{3} = -0{,}61357821;\quad \frac{\frac{x-x_0}{h}-3}{4} = -0{,}71018366.$$

Имѣя эти значенія, не трудно выразить въ числахъ формулу (3):

$$u_x = \log 3{,}1415926536 = 0{,}4971498727.$$

§ 250. Формула Лагранжа. — Существуетъ другая формула для приближеннаго вычисленія значеній функціи u, когда извѣстны ея значенія: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$, соотвѣтствующія значеніямъ: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ перемѣнной. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы предположимъ, что u есть раціональная функція отъ x, степени n. Итакъ, пусть

$$u_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^n,$$

откуда

$$u_0 = \alpha + \beta x_0 + \gamma x_0^2 + \ldots + \mu x_0^n,$$
$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \ldots + \mu x_1^n,$$
$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \ldots + \mu x_2^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = \alpha + \beta x_n + \gamma x_n^2 + \ldots + \mu x_n^n.$$

Полученныя уравненія—первой степени относительно $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$, значенія которыхъ мы и найдемъ, рѣшая эту систему.

Но, чтобы избѣжать ея рѣшенія, полагаютъ

$$u_x = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots + X_n u_n,$$

гдѣ $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть функціи отъ x, подчиненныя слѣдующимъ условіямъ:

при $x = x_0$ функціи: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ должны обратиться въ нуль, а X_0—въ единицу;

при $x = x_1$ функціи: $X_0, X_2, \ldots, X_n$ должны обратиться въ нуль, а X_1—въ единицу;

при $x = x_2$ функціи: $X_0, X_1, X_3, \ldots, X_n$ должны обратиться въ нуль, а X_2—въ единицу;

. . . .

при $x = x_n$ функціи: $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ должны обратиться въ нуль, а X_n—въ единицу.

Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что при такихъ условіяхъ u_x обратится въ $u_0, u_1, \ldots, u_n$, когда x будетъ получать соотвѣтственно значенія: $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Если же X_0 обращается въ нуль при значеніяхъ: $x_1, x_2, \ldots$ перемѣнной x, то можно положить

$$X_0 = A_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

и такъ какъ при $x = x_0$ функція $X_0 = 1$, то

$$A_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)};$$

слѣдовательно,

$$X_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$X_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

$$X_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)},$$

и т. д. Итакъ, искомая формула будетъ:

$$u_x = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots +$$
$$+ u_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

III. Приложеніе метода интерполированія къ точному составленію цѣлой функціи $f(x)$, степени m, когда извѣстны ея значенія: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$, соотвѣтствующія значеніямъ: $x_0, x_0+h, \ldots, x_0+mh$ перемѣнной.

§ 251. Составленіе цѣлой функціи.—Формула интерполированія (3) (**§ 246**) служитъ для составленія цѣлой функціи, степени m, которая при значеніяхъ: $x_0, x_0+h, \ldots, x_0+mh$ перемѣнной x принимала бы соотвѣтственно значенія: $u_0, u_1, \ldots, u_m$. Мы знаемъ, что двѣ цѣлыя функціи, степени m, могутъ быть равны при $(m+1)$ значеніяхъ перемѣнной только при полной ихъ тождественности, потому что въ противномъ случаѣ, приравнивая такія функціи другъ другу, мы получили бы уравненіе степени m, допускающее $(m+1)$ корней. Слѣдовательно, искомая функція тождественна съ формулою, найденною по методу интерполированія, т.-е.

$$f(x) = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1\right)}{1.2\ldots m} \Delta^m u_0. \qquad (A)$$

§ 252. Предѣлы корней уравненія: $f(x) = 0$.—Изъ этой формулы заключаемъ, что если количества: $u_0, \Delta u_0, \ldots, \Delta^m u_0$ положительны, то при значеніи x такомъ, при которомъ $\frac{x - x_0}{h}$, $\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right), \ldots$, $\left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1\right)$ являются положительными количествами, иначе

говоря, при x большемъ $x_0+(m-1)h$, $f(x)$ будетъ положительна. Можно даже прибавить, что, начиная со значенія $x=x_0+(m-1)h$, всѣ члены, образующіе вторую часть формулы (A), увеличиваются вмѣстѣ съ x и что, слѣдовательно, то же относится и къ $f(x)$. Отсюда, очевидно, вытекаетъ, что $x_0+(m-1)h$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія: $f(x)=0$, и рѣшенія уравненія должно искать между числами, низшими этого предѣла.

Точно также, если придать x значеніе x_0 такое, что количества: u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, . . . , $\Delta^n u_0$ будутъ по-перемѣнно положительными и отрицательными, то x_0 явится низшимъ предѣломъ для корней; дѣйствительно, при всякомъ значеніи x, низшемъ x_0, каждый изъ членовъ $f(x)$ долженъ быть положительнымъ и, слѣдовательно, $f(x)$ не можетъ обратиться въ нуль.

КОНСПЕКТЪ.

§ 245. Цѣль интерполированія; произвольное условіе, которому подчиняютъ интерполированіе.—**§ 246.** Формула интерполированія Ньютона, приложимая къ функціи, для которой извѣстны значенія, соотвѣтствующія значеніямъ перемѣнной, взятымъ въ ариѳметической прогрессіи.—**§ 247.** Замѣчаніе.—**§ 248.** Найденная функція есть единственный многочленъ, цѣлый относительно x, который можетъ удовлетворить требуемымъ условіямъ.—**§ 249.** Приложеніе къ примѣру.—**§ 250.** Формула интерполированія Лагранжа.—**§ 251.** Приложеніе метода интерполированія къ точному составленію цѣлой функціи, степени m, когда извѣстны ея значенія, соотвѣтствующія ($m+1$) значеніямъ перемѣнной, взятымъ въ ариѳметической прогрессіи.—**§ 252.** Предѣлы корней уравненія: $f(x)=0$.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. При наблюденіи нѣкоторой планеты были найдены слѣдующія ея прямыя восхожденія:

12 января	$12^h 30'$	$0°3'25'',21$,
19 января	$9^h 0'$	$0°1'28'',04$,
20 января	$9^h 17'$	$0°2'26'',67$,
24 января	$8^h 1'$	$-0°0'58'',3$.

Найти, посредствомъ интерполированія, прямое восхожденіе въ полдень 22 января.

II. При тѣхъ же данныхъ найти день и часъ, когда прямое восхожденіе было равно нулю.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Рѣшеніе численныхъ уравненій.

I. Отдѣленіе корней.

§ 253. Предварительныя дѣйствія.—Чтобы рѣшить численное уравненіе, сначала слѣдуетъ найти соизмѣримые корни и опустить множителей, соотвѣтствующихъ этимъ корнямъ. Далѣе, должно приложить къ уравненію методъ, изложенный въ **Кн. III, гл. III**, для приведенія его къ нѣсколькимъ другимъ уравненіямъ, имѣющимъ только простые корни. Первое изъ этихъ дѣйствій не имѣетъ другой цѣли, какъ только упростить вычисленія. Второе же дѣйствіе неизбѣжно надо выполнить, потому что только послѣ него мы можемъ утверждать, относительно уравненій съ простыми корнями, что если существуетъ корень a, то два числа: $(a-h)$ и $(a+h')$, между которыми онъ содержится, будучи подставлены въ уравненіе, должны дать результаты съ противоположными знаками при достаточно малыхъ h и h'. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы между $(a-h)$ и $(a+h')$ не было никакого другого корня кромѣ a.

Наконецъ, прежде чѣмъ приступить къ приложенію метода разысканія корней, изложеннаго въ дальнѣйшихъ параграфахъ, слѣдуетъ еще установить, по извѣстнымъ правиламъ (**§§ 208** и слѣд.), высшій предѣлъ положительныхъ корней и низшій предѣлъ отрицательныхъ корней, возможныхъ для даннаго уравненія.

§ 254. Подстановка цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ.—Послѣ выполненія предварительныхъ дѣйствій, о которыхъ мы только-что говорили и изъ которыхъ, повторяемъ, необходимо только одно, именно относящееся къ равнымъ корнямъ, подставляемъ въ первую часть даннаго уравненія цѣлыя послѣдовательныя числа: $-\dots$, $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots$, содержащіяся между предѣлами корней. Эта подстановка производится, какъ объяснено выше (**§ 239**), по методу разностей, т.-е. вычисляется непосредственно m послѣдовательныхъ значеній уравненія, при чемъ m обозначаетъ степень уравненія, и составляются ихъ разности до $(m-1)$-го порядка включительно. Далѣе, основываясь на томъ, что

разность m-го порядка постоянна, можно вычислить, посредствомъ простыхъ сложеній или вычитаній, значенія послѣдовательныхъ разностей и, слѣдовательно, значенія первой части уравненія, соотвѣтствующія другимъ значеніямъ перемѣнной. Изъ того же закона, по которому составляется эта таблица, слѣдуетъ, что при возрастаніи x функція и всѣ ея разности станутъ, наконецъ, положительными, а при убываніи станутъ, наконецъ, попеременно положительными и отрицательными. Въ обоихъ случаяхъ, какъ только эти условія наступятъ, дальнѣйшія подстановки цѣлыхъ чиселъ безполезны, потому что ни одна изъ нихъ, очевидно, не можетъ измѣнить знаковъ.

Если результаты подстановки цѣлыхъ чиселъ въ первую часть уравненія не всѣ одного знака, то одна или нѣсколько паръ послѣдовательныхъ результатовъ будутъ съ противоположными знаками; и мы можемъ утверждать, что между соотвѣтственными цѣлыми числами находится или одинъ, или же нечетное число корней.

Если число промежутковъ, въ которыхъ существованіе вещественныхъ корней является такимъ образомъ доказаннымъ, точно равно возможному числу корней по теоремѣ Декарта, то корни *отдѣлены*; иначе говоря, для каждаго изъ нихъ мы будемъ имѣть два числа, между которыми лежитъ этотъ корень и никакихъ другихъ нѣтъ.

Случается и наоборотъ, что число такихъ промежутковъ меньше числа возможныхъ корней; въ особенности же, сомнительнымъ является тотъ случай, когда цѣлыя числа, подставленныя въ первую часть уравненія, даютъ результаты съ одинаковыми знаками: тогда надо прибѣгнуть къ новымъ подстановкамъ, которыя должны быть произведены только въ заранѣе выбранныхъ промежуткахъ, гдѣ онѣ могутъ еще дать благопріятный результатъ. Вотъ какъ опредѣляются такіе промежутки.

§ 255. Выборъ промежутковъ, въ которыхъ должны быть производимы новыя подстановки.—Получивъ результаты подстановки цѣлыхъ чиселъ въ первую часть даннаго уравненія, наносимъ на прямой линіи, отъ произвольнаго начала O, длины, пропорціональныя значеніямъ 1, 2, 3, . . . , приписываемымъ неизвѣстной x, въ одномъ направленіи и длины, выражающія отрицательныя значенія: —1, 2, —3, . . . , въ противоположномъ направленіи; далѣе, въ концѣ каждой изъ этихъ длинъ возставляемъ (безъ *особой*, впрочемъ, точ-

ности) перпендикуляръ, представляющій соотвѣтственное значеніе первой части предложеннаго уравненія, при чемъ онъ долженъ итти въ томъ или другомъ направлении, смотря по тому, какое выражается имъ значеніе, положительное или отрицательное. Очевидно, что если выполнить такое же построеніе не только для цѣлыхъ, но и для всѣхъ возможныхъ значеній x, то геометрическимъ мѣстомъ концовъ перпендикуляровъ будетъ нѣкоторая кривая; пересѣченія же этой кривой съ прямою, на которой отложены x-ы, дадутъ корни, дѣйствительно, они будутъ соотвѣтствовать тѣмъ значеніямъ x, при которыхъ нужно отложить на перпендикулярахъ отъ оси длины, равныя нулю, а это значитъ, что первая часть уравненія обращается въ нуль. Полученныя частныя значенія первой части даютъ намъ нѣкоторыя точки кривой, по которымъ можно опредѣлить *приблизительно* ея видъ и, слѣдовательно, намѣтить тѣ промежутки, въ которыхъ вѣроятно существованіе корней и гдѣ, поэтому, надлежитъ ихъ искать посредствомъ новыхъ подстановокъ.

Если, напр., при подстановкѣ вмѣсто x значеній: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 первая часть уравненія получаетъ значенія:

1,50; 0,86; 0,08; 0,15; 1,25; 3; 4,

то соотвѣтственныя точки нужно построить приблизительно такъ, какъ это показано на слѣдующемъ чертежѣ:



Принимаютъ, что если кривая, соединяющая ихъ, пересѣкаетъ ось x-овъ, то это пересѣченіе должно произойти между точками: 2 и 3. Однако, *мы никоимъ образомъ не въ правѣ утверждать*, что въ другихъ промежуткахъ нѣтъ корней, для строгости можно допустить существованіе ихъ даже между 5 и 6, т.-е. въ такомъ промежуткѣ, гдѣ, конечно, предполагать ихъ нельзя, имѣя въ виду полученныя значенія первой части уравненія. Контуръ неизвѣстной кривой, соединяющей различныя наши точки, долженъ быть вычерченъ въ достаточной степени.

§ 256. Теорема.—Есть, однако, теорема, дающая предѣлъ тѣхъ отступленій, какія могутъ представить кривыя, аналогичныя предыдущимъ.

Если предложенное уравненіе степени m, то линія, параллельная той, на которой откладываются значенія x, ни въ какомъ случаѣ не можетъ встрѣтить кривую болѣе, чѣмъ въ m точкахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть d есть разстояніе нѣкоторой параллельной отъ оси x-овъ; она встрѣтитъ кривую какъ разъ въ точкахъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ значеніямъ x, при которыхъ первая часть уравненія равна d. Приравнивая же первую часть данному числу, мы получаемъ уравненіе также степени m, которое не можетъ имѣть болѣе m корней. Прибавимъ къ сказанному, что не рѣдко приложеніе теоремы Декарта къ этому новому уравненію дастъ еще болѣе меньшій предѣлъ.

Возвращаясь къ примѣру, приведенному въ предыдущемъ параграфѣ, видимъ, что если бы существовалъ корень между 5 и 6, то кривая могла бы пересѣкаться прямою, параллельною оси x-овъ, по крайней мѣрѣ, въ четырехъ точкахъ и, слѣдовательно, то новое уравненіе, которое получилось бы отъ приравниванія первой части даннаго нѣкоторому числу d, могло бы имѣть четыре положительныхъ корня

§ 257. Подстановка чиселъ, измѣняющихся равномѣрно на одну десятую.—Когда на основаніи полученныхъ результатовъ мы опредѣлимъ тѣ промежутки, въ которыхъ предполагается существованіе корней, то въ этихъ промежуткахъ мы должны будемъ подставлять числа, равномѣрно измѣняющіяся на одну десятую; чаще всего случается, что такія подстановки довольно ясно указываютъ на видъ кривой, по которому можно уже или съ увѣренностью намѣтить предѣлы, содержащіе корни, или же убѣдиться въ томъ, что ихъ нѣтъ. О способѣ, какъ пользоваться этими новыми результатами говорить не будемъ: пришлось бы слово въ слово повторить все сказанное о подстановкѣ цѣлыхъ чиселъ.

Чтобы вычислить результаты подстановки чиселъ, измѣняющихся равномѣрно на одну десятую, слѣдуетъ поступить совершенно такъ же какъ это мы дѣлали при подстановкѣ цѣлыхъ чиселъ, т.-е. сначала вычислить столько послѣдовательныхъ результатовъ, какъ велика степень уравненія, далѣе, составить ихъ разности и, наконецъ, отыскать дальнѣйшія значенія посредствомъ простыхъ сложеній.

II. Специальное изслѣдованіе случая, когда уравненіе — третьей степени.

§ 258. Упрощеніе, относящееся къ этому уравненію.—Пусть будетъ данъ многочленъ третьей степени:

$$\varphi(x) = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Предположимъ, что подставляемыя числа идутъ въ ариѳметической прогрессіи съ разностью h; извѣстно еще значеніе функціи $\varphi(x)$ при нѣкоторомъ значеніи $x = x_0$ перемѣнной и, кромѣ того, составлены: $\Delta\varphi(x_0)$, $\Delta^2\varphi(x_0)$, $\Delta^3\varphi(x_0)$. Мы дадимъ простой способъ для вычисленія разностей, соотвѣтствующихъ въ десять разъ меньшему приращенію подставляемыхъ чиселъ; назовемъ ихъ черезъ $\delta\varphi(x_0)$, $\delta^2\varphi(x_0)$, $\delta^3\varphi(x_0)$. Имѣемъ:

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x_0). \quad (1)$$

Чтобы составить $\Delta^2\varphi(x_0)$, нужно взять *разность* отъ второй части, т.-е. найти ея приращеніе, когда x_0 измѣняется въ $(x_0 + h)$; получимъ:

$$\Delta^2\varphi(x_0) = h[\varphi'(x_0 + h) - \varphi'(x_0)] + \frac{h^2}{1.2}[\varphi''(x_0 + h) - \varphi''(x_0)] +$$
$$+ \frac{h^3}{1.2.3}[\varphi'''(x_0 + h) - \varphi'''(x_0)];$$

но такъ какъ $\varphi'(x_0)$ — второй степени, $\varphi''(x_0)$ — первой и $\varphi'''(x_0)$ — постоянная величина, то

$$\varphi'(x_0 + h) - \varphi'(x_0) = h\varphi''(x_0) + \frac{h^2}{1.2}\varphi'''(x_0),$$
$$\varphi''(x_0 + h) - \varphi''(x_0) = h\varphi'''(x_0),$$
$$\varphi'''(x_0 + h) - \varphi'''(x_0) = 0;$$

слѣдовательно, послѣ подстановки будетъ:

$$\Delta^2\varphi(x_0) = h^2\varphi''(x_0) + h^3\varphi'''(x_0). \quad (2)$$

Такъ же найдемъ:

$$\Delta^3\varphi(x_0) = h^2[\varphi''(x_0 + h) - \varphi''(x_0)] + h^3[\varphi'''(x_0 + h) - \varphi'''(x_0)],$$

или, по предыдущему,

$$\Delta^3\varphi(x_0) = h^3\varphi'''(x_0). \tag{3}$$

Итакъ,

$$\Delta\varphi(x_0) = h\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{6}\varphi'''(x_0), \tag{1}$$

$$\Delta^2\varphi(x_0) = h^2\varphi''(x_0) + h^3\varphi'''(x_0), \tag{2}$$

$$\Delta^3\varphi(x_0) = h^3\varphi'''(x_0). \tag{3}$$

Замѣняя въ этихъ формулахъ h черезъ $\frac{h}{10}$, получаемъ:

$$\delta\varphi(x_0) = \frac{h}{10}\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{200}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{6000}\varphi'''(x_0), \tag{4}$$

$$\delta^2\varphi(x_0) = \frac{h^2}{100}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{1000}\varphi'''(x_0), \tag{5}$$

$$\delta^3\varphi(x_0) = \frac{h^3}{1000}\varphi'''(x_0). \tag{6}$$

Эти послѣднія формулы показываютъ, что зная значенія разностей Δ, мы найдемъ непосредственно $\delta^3\varphi(x_0)$, взявъ тысячную часть отъ $\Delta^3\varphi(x_0)$; далѣе, $\delta^2\varphi(x_0)$ представляетъ сумму двухъ членовъ, изъ которыхъ второй равенъ только-что составленной $\delta^3\varphi(x_0)$, а первый есть сотая часть разности $\Delta^2\varphi(x_0) - \Delta^3\varphi(x_0)$, т.-е. разности, предшествующей $\Delta^2\varphi(x_0)$ въ ряду разностей Δ^2. Наконецъ, $\delta\varphi(x_0)$ составляется изъ трехъ членовъ; изъ нихъ два послѣднихъ извѣстны: одинъ есть шестая часть отъ $\delta^3\varphi(x_0)$, а другой — половина отъ $\frac{h^2}{100}\varphi''(x_0)$, т.-е. половина отъ члена, уже вычисленнаго при составленіи δ^2. Относительно третьяго же члена замѣтимъ, что онъ равенъ десятой части отъ выраженія $h\varphi'(x_0)$, легко вычисляемаго по формулѣ:

$$h\varphi'(x_0) = \Delta\varphi(x_0) - \frac{h^2}{2}\varphi''(x_0) - \frac{h^3}{6}\varphi'''(x_0),$$

вторая часть которой состоитъ изъ трехъ извѣстныхъ членовъ. Итакъ,

$\delta^3\varphi(x_0)$ есть тысячная часть отъ $\Delta^3\varphi(x_0)$;

$\delta^2\varphi(x_0)$ есть сумма $\delta^3\varphi(x_0)$ и сотой части отъ члена, предшествующаго $\Delta^2\varphi(x_0)$ въ ряду разностей Δ^2;

$\delta\varphi(x_0)$ составляется изъ шестой части отъ $\delta^3\varphi(x_0)$, половины

члена, вычисленнаго при полученіи $\delta^2\varphi(x_0)$ и десятой части отъ выраженія:

$$\Delta\varphi(x_0) - \frac{h^2}{2}\varphi''(x_0) - \frac{h^3}{6}\varphi'''(x_0),$$

всѣ три члена котораго извѣстны.

§ 259. **Приложеніе предыдущаго метода.**—Разсмотримъ уравненіе:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

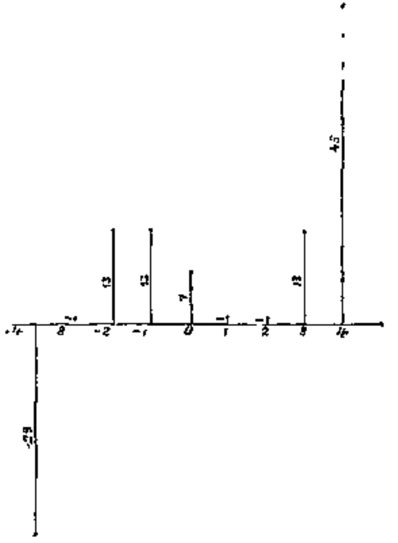
Подставляя вмѣсто x значенія: -1, 0, $+1$, находимъ для первой части соотвѣтственныя значенія: 13, 7, 1; первыя разности отъ нихъ суть: -6, -6, а вторая равна 0. Что же касается третьей разности, то мы знаемъ (§ 236), что она всегда равна 6. Такимъ образомъ, мы можемъ написать слѣдующую таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
−1	13	−6	0	6
0	7	−6		6
1	1			6
				6

Изъ нея мы выводимъ, посредствомъ послѣдовательныхъ сложеній, таблицу значеній $\Delta^2 y$, Δy, y, собранныхъ ниже въ новой таблицѣ; изъ этой же послѣдней мы легче получимъ для нашего примѣра тѣ данныя, которыя лежатъ въ основѣ всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленій.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−4	−29	30	−18	6
−3	1	12	−12	6
−2	13	0	−6	6
−1	13	−6	0	6
0	7	−6	6	6
1	1	0	12	6
2	1	12	18	
3	13	30		
4	43			
5				

Разсматривая значенія y, заключаемъ, что существуетъ отрицательный корень между -3 и -4; другихъ отрицательныхъ корней нѣтъ (по правилу Декарта). Что касается положительныхъ корней, то ихъ можетъ быть два; но чтобы найти ихъ, надо прибѣгнуть къ новымъ подстановкамъ. Полученные результаты представлены на чертежѣ. Такъ какъ кривая, соединяющая эти точки, можетъ пересѣкаться прямою, параллельною оси x-овъ, только въ трехъ точкахъ, то, очевидно, она пересѣкается этою прямою между точками: 1 и 2, поэтому, мы должны подставлять значенія, содержащіяся между $x=1$ и $x=2$, и притомъ равномѣрно измѣняющіяся на 0,1.



Мы знаемъ, что при $x=1$ первая часть, обозначенная нами черезъ y, тоже равна 1; кромѣ того, для приращеній x, равныхъ единицѣ, $\Delta y=0$, $\Delta^2 y=0$, $\Delta^3 y=6$. Дѣлая приращеніе равнымъ $\frac{1}{10}$, находимъ (**§ 258**):

$$\delta^3 y=0{,}066, \quad \delta^2 y=0{,}066, \quad \delta y=-0{,}369;$$

по этимъ значеніямъ составляемъ слѣдующую таблицу:

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
1	1	−0,369	0,066	0,006
1,1	0,631	−0,303	0,072	0,006
1,2	0,328	−0,231	0,078	0,006
1.3	0,097	−0,153	0,084	0,006
1,4	−0,056	−0,069	0,090	0,006
1,5	−0,125	0,021	0,096	0,006
1,6	−0,104	0,117	0,102	0,006
1,7	+0,013	0,219	0,108	0,006
1,8	0,232	0,327	0,114	
1,9	0,559	0,441		
2	1			

Изъ нея мы усматриваемъ, что y измѣняетъ знакъ при переходѣ x отъ значенія 1,3 къ значенію 1,4 и отъ значенія 1,6 къ значенію 1,7. Слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня, значенія которыхъ, съ точностью до одной десятой, суть 1,3 и 1,6.

§ 260. Вычисленіе корней съ точностью до 0,01. — Чтобы достигнуть большаго приближенія, нужно, далѣе, подставлять вмѣсто x значенія, равномѣрно измѣняющіяся на 0,01 и заключающіяся между 1,3 и 1,4, а также между 1,6 и 1,7. Эти подстановки, какъ и предыдущія, производятся посредствомъ разностей. Прежде всего замѣчаемъ, что при $x = 1,3$ значеніе $y = 0,097$; исходя изъ этого значенія, находимъ для разностей, какъ показываетъ предыдущая таблица, при приращеніи x въ 0,1, значенія:

$$y = 0,097,\ \Delta y = -0,153,\ \Delta^2 y = 0,084,\ \Delta^3 y = 0,006.$$

Пусть теперь приращеніе x равно 0,01; тогда на основаніи данныхъ выше формулъ получимъ:

$$\delta^3\varphi(x_0) = \frac{1}{1000}\times\Delta^3\varphi(x_0) = 0,000006,$$

$$\delta^2\varphi(x_0) = 0,000006 + \frac{1}{100}\times 0,078 = 0,000786,$$

$$\delta\varphi(x_0) = 0,000001 + 0,00039 + \frac{1}{10}(-0,153 - 0,039 - 0,001) = \\ = 0,018909;$$

кромѣ того $y = 0,097$ при $x = 1,3$. Слѣдовательно, мы можемъ написать слѣдующую таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	0,097000	−0,018909	0,000786	0,000006
1,31	0,078091	−0,018123	0,000792	0,000006
1,32	0,059968	−0,017331	0,000798	0,000006
1,33	0,042637	−0,016533	0,000804	0,000006
1,34	0,026104	−0,015729	0,000810	0,000006
1,35	0,010375	−0,014919	0,000816	0,000006
1,36	−0,004544	−0,014103	0,000822	0,000006
1,37	−0,018647	−0,013281	0,000828	0,000006
1,38	−0,031928	−0,012453	0,000834	
1,39	−0,044381	−0,011619		
1,4	−0,056000			

При помощи тѣхъ же формулъ вычисляемъ значенія Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, соотвѣтствующія приращеніямъ x, равнымъ 0,01, исходя изъ значенія $x = 1,6$; у насъ составится слѣдующая таблица:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,6	0,104000	0,007281	0,000966	0,000006
1.61	0,096719	0,008247	0,000972	0,000006
1,62	-0,088472	0,009219	0,000978	0,000006
1,63	—0,079253	0,010197	0,000984	0,000006
1,64	—0,069056	0,011181	0,000990	0,000006
1,65	—0,057875	0,012171	0,000996	0,000006
1,66	—0,045704	0 013167	0,001002	0,000006
1,67	—0,032537	0,014169	0,001008	0,000006
1,68	0,018368	0,015177	0,001014	
1,69	-0,003191	0 016191		
1,7	+0,013000			

Изъ этихъ таблицъ видно, что изъ двухъ положительныхъ корней одинъ заключается между 1,35 и 1,36, а другой—между 1,69 и 1,70. Чтобы вычислить наибольшій изъ нихъ съ точностью до одной тысячной, нужно, далѣе, подставлять значенія, равномѣрно измѣняющіяся на одну тысячную и заключающіяся между 1,69 и 1,70. Вычисляя точно такъ же, какъ и при составленіи предыдущихъ таблицъ, получимъ новую таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,69	—0,003191000	0,001573371	0,000010146	0,000000006
1,691	—0,001617629	0,001583517	0,000010152	0,000000006
1,692	-0,000034112	0,001593669	0,000010158	0,000000006
1,693	+0,001559557	0,001603827	0,000010164	0 000000006
1,694	0,003163384	0,001613991	0,000010170	0.000000006
1,695	0,004777375	0,001624161	0,000010176	0,000000006
1,696	0,006401536	0,001634337	0.000010182	0,000000006
1,697	0,008035873	0,001644519	0,000010188	0,000000006
1,698	0,009680392	0,001654707	0,000010194	
1,699	0,011335099	0,001664901		
1,70	0,013000000			

Отсюда видно, что y измѣняетъ знакъ при переходѣ x отъ 1,692

къ 1,693. Итакъ, большій корень, съ точностью до одной тысячной, равенъ 1,692.

§ 261. Употребленіе пропорціи для полученія корня. — Предыдущія таблицы даютъ возможность достигнуть еще большаго приближенія. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчаемъ, что въ послѣдней изъ этихъ таблицъ разности второго порядка крайне малы; поэтому, можно, *безъ чувствительной погрѣшности,* принять ихъ за нуль и, слѣдовательно, допустить, что приращенія y пропорціональны приращеніямъ x. А въ такомъ случаѣ то значеніе x, при которомъ y обращается въ нуль, мы получимъ точно такимъ же путемъ, какимъ производятся вычисленія съ логариѳмическими таблицами. Разсуждать будемъ такъ:

Когда x увеличивается на 0,001 при переходѣ отъ 1,692 къ 1,693, y измѣняется на 0,001593669; а чтобы измѣненіе y равнялось 0,000034112, т.-е. чтобы y обратилось въ нуль, нужно, чтобы измѣненіе δ перемѣнной x удовлетворяло пропорціи:

$$\frac{\delta}{0{,}001}=\frac{0{,}000034112}{0{,}001593669},$$

откуда

$$\delta=\frac{0{,}000000034112}{0{,}001593669}=0{,}0000214;$$

слѣдовательно, корень приближенно равенъ 1,6920214.

Должно замѣтить, что разность второго порядка, которую мы приняли за нуль, на самомъ дѣлѣ немного болѣе 0,00001 и поэтому можетъ вліять на седьмую цифру послѣ запятой; слѣдовательно, нѣтъ никакого основанія эту послѣднюю считать за точную цифру.

Итакъ, корень должно принять равнымъ 1,692021.

§ 262. Второе приложеніе.—Въ предыдущемъ примѣрѣ опредѣленіе промежутковъ, въ которыхъ нужно производить новыя подстановки, не представляло никакого труда. Къ сожалѣнію, это не всегда бываетъ такъ.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$y=9x^3-24x^2+16x-0{,}001=0.$$

Подставляя вмѣсто x значенія: -1, 0, 1, находимъ для y соотвѣтственныя значенія: $-49{,}001$, $-0{,}001$, 0,999, первыя разности отъ которыхъ суть: 49 и 1, а разность второго порядка -48. Что ка-

сается разности третьяго порядка, то она (§ 236) постоянна и равна 54. Поэтому, мы можемъ написать слѣдующую таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	$-49{,}001$	49	-48	54
0	$-0{,}001$	1	6	54
1	$+0{,}999$	7	60	54
2	7,999	67	114	
3	74,999	181		
4	255 999			

Если эти значенія представить графически (§ 255), то ясно будетъ видно, что одинъ корень лежитъ между $x=0$ и $x=1$, но ничего нельзя сказать ни о другихъ корняхъ, ни о новыхъ подстановкахъ.

Однако, если подставлять значенія, равномѣрно измѣняющіяся на 0,1 въ промежуткѣ между 1 и 2, то найдемъ для разностей, относящихся къ $x=1$ при его приращеніи въ 0,1, слѣдующія значенія: $\Delta y = -0{,}461$, $\Delta^2 y = 0{,}114$, $\Delta^3 y = 0{,}054$ и на основаніи ихъ напишемъ таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	0,999	$-0{,}461$	0,114	0,054
1,1	0,538	$-0{,}347$	0,168	0,054
1,2	0,191	$-0{,}179$	0,222	0,054
1,3	0,012	$+0{,}043$	0,276	0,054
1,4	0,055	0,319	0,330	0,054
1,5	0,374	0,649	0,384	0,054
1,6	1,023	1,033	0,438	0,054
1,7	2,056	1,471	0,492	0,054
1,8	3,527	1,963	0,546	
1,9	5,490	2,509		
2	7,999			

Представляя графически результаты, собранные въ этой таблицѣ, мы ясно увидимъ, что кривая, проходящая черезъ полученныя точки, можетъ пересѣчь ось x-овъ только между точкою 1,3 и точкою 1,4. Подставляемъ, поэтому, значенія x, заключающіяся между этими двумя значеніями и равномѣрно измѣняющіяся на 0,01.

Чтобы получить результаты подстановокъ, вычисляемъ сначала, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, по формуламъ § 258-го значенія Δy, $\Delta^2 y$ и $\Delta^3 y$, соотвѣтствующія $x=1,3$ при приращеніяхъ перемѣнной на 0,01, послѣ чего у насъ составится слѣдующая таблица:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	+0,012000	0,006581	0,002274	0,000054
1,31	+0,005419	−0,004307	0,002328	0,000054
1,32	+0,001112	−0,001979	0,002382	0,000054
1,33	−0,000867	+0,000403	0,002436	0,000054
1,34	−0,000464	0,002839	0,002490	0,000054
1,35	+0,002375	0,005329	0,002544	0,000054
1,36	+0,007704	0,007873	0,002598	0,000054
1,37	+0,015577	0,010471	0,002652	0,000054
1,38	+0,026048	0,013123	0,002706	
1,39	+0,039171	0,015829		
1,4	+0,055000			

Эта таблица показываетъ, что одинъ изъ корней содержится между 1,32 и 1,33, а другой—между 1,34 и 1,35.

III. Методъ Ньютона.

§ 263. Изложеніе метода.—Если разсматривается функція въ очень небольшомъ промежуткѣ, то можно почти всегда, безъ чувствительной погрѣшности, принимать ея приращенія пропорціональными приращеніямъ перемѣнной и выражать ихъ посредствомъ произведенія производной отъ функціи на приращеніе перемѣнной. Допускаемая при этомъ ошибка будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше самыя приращенія. Сказанное относится ко всѣмъ функціямъ, но здѣсь мы разовьемъ это замѣчаніе только для цѣлыхъ алгебраическихъ функцій съ цѣлью приложить его къ рѣшенію уравненій, разсмотрѣнныхъ въ этой главѣ.

Пусть

$$F(x)=0 \tag{1}$$

будетъ алгебраическое уравненіе и a—приближенное значеніе одного изъ корней, точное значеніе котораго обозначимъ черезъ $(a+h)$; очевидно,

$$F(a+h)=0, \tag{2}$$

или, что одно и то же,

$$F(a)+F'(a)h+F''(a)\frac{h^2}{1.2}+\ldots+F^m(a)\frac{h^m}{1.2\ldots m}=0. \qquad (3)$$

Отбрасывая члены, содержащіе h въ степени высшей, чѣмъ первая, получимъ равенство:

$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h$$

съ тѣмъ большимъ приближеніемъ, чѣмъ меньше h; уравненіе же (3) перейдетъ въ слѣдующее:

$$F(a)+hF'(a)=0,$$

откуда

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)};$$

слѣдовательно, приближенное значеніе корня есть

$$a-\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Называя это значеніе черезъ b и прилагая къ нему тотъ же пріемъ, найдемъ еще болѣе приближенное значеніе:

$$b-\frac{F(b)}{F'(b)}.$$

Повторяя это дѣйствіе нѣсколько разъ подъ рядъ, мы быстро достигнемъ весьма большого приближенія.

Невозможно опредѣлить въ общемъ видѣ, независимо отъ всякаго частнаго примѣра, степень быстроты, съ которою возрастаютъ приближенія; въ каждомъ же отдѣльномъ случаѣ легко составить представленіе о степени этой быстроты, что мы и покажемъ на слѣдующемъ примѣрѣ.

§ 264. Приложеніе —Примѣръ I. Вернемся къ уравненію (**§ 259**):

$$F(x)=x^3-7x+7=0,$$

мы нашли, что одинъ изъ его корней съ точностью до 0,001 равенъ 1,692; обозначая его черезъ $1,692+h$, или, для сокращенія, черезъ $(a+h)$, при чемъ h будетъ меньше 0,001, мы можемъ написать:

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(a)=0,$$

откуда

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)} - \frac{h^2}{1.2}\frac{F''(a)}{F'(a)} - \frac{h^3}{1.2.3}\frac{F'''(a)}{F'(a)}.$$

Далѣе, такъ какъ a здѣсь равно 1,692 и, слѣдовательно, коэффиціенты при h^2 и h^3 соотвѣтственно меньше 3,2 и 1, то второй и третій члены во второй части равенства соотвѣтственно меньше 0,0000032 и 0,000000001; отсюда заключаемъ, что

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)}$$

съ точностью до 4 милліонныхъ. А такъ какъ по таблицѣ **§ 260**-го при $x=1,692=a$

$$F(a) = -0,000034112$$

и, кромѣ того,

$$F'(a) = 3a^2 - 7 = +1,588592,$$

то

$$h = \frac{0,000034112}{1,588592} = 0,000021473.$$

Полученный результатъ показываетъ, что значеніе $x=1,692$ было точно не только до 0,001, но даже до 0,0001, потому что четвертая цифра послѣ запятой есть нуль; сверхъ того, видно, что при $x=1,6920$ ошибка h меньше 0,000025, или, что одно и то же, меньше $\frac{1}{40000}$; слѣдовательно, полученное число отличается отъ истиннаго меньше, чѣмъ на $\frac{1}{10^8}$, и значеніе x съ 8 цифрами послѣ запятой есть

$$x = 1,6920\ 2147.$$

Итакъ мы имѣемъ новое приближенное значеніе того же корня, именно

$$1,6920\ 2147 = b;$$

обозначая точное его значеніе черезъ

$$1,6920\ 2147 + h' = b + h',$$

мы можемъ написать:

$$0 = F(b+h') = F(b) + h'F'(b) + \frac{h'^2}{1.2}F''(b) + \frac{h'^3}{1.2.3}F'''(b),$$

откуда

$$h' = -\frac{F(b)}{F'(b)} - \frac{h'^2}{1.2}\frac{F''(b)}{F'(b)} - \frac{h'^3}{1.2.3}\frac{F'''(b)}{F'(b)}.$$

А такъ какъ h' меньше $\frac{1}{10^{8}}$, то h'^2 меньше $\frac{1}{10^{16}}$; кромѣ того, коэффиціентъ при немъ меньше 3,2; далѣе, h'^3 меньше $\frac{1}{10^{24}}$, а коэффиціентъ при немъ меньше единицы; поэтому, принявъ

$$h' = -\frac{F(b)}{F'(b)},$$

мы сдѣлаемъ ошибку порядка $\frac{1}{10^{15}}$. Этого примѣра достаточно, чтобы показать, съ какою быстротою возрастаютъ приближенія и какъ въ каждомъ случаѣ оцѣнить ихъ степень.

§ 265. Примѣръ II.—Дано уравненіе:

$$F(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Первая производная будетъ

$$F'(x) = 3x^2 - 2$$

и, слѣдовательно, поправка

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = -\frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2}.$$

Первое приближеніе.—Непосредственно находимъ, что вещественный корень уравненія содержится между 2,0 и 2,1; поэтому, полагаемъ $a=2{,}1$ и исходимъ изъ этого значенія, чтобы найти корень x съ бо́льшею точностью. Подставляя 2,1 вмѣсто x въ функціи $F(x)$ и $F'(x)$, получаемъ:

$$F(a) = 0{,}061,$$
$$F'(a) = 11{,}23;$$

значитъ,

$$h = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}00543$$

и, слѣдовательно.

$$b = 2{,}095.$$

Второе приближеніе. — Исходя изъ этого новаго приближеннаго значенія корня, мы составляемъ сначала:

$$b = 2{,}095,$$
$$b^2 = 4{,}389,$$
$$b^3 = 9{,}195,$$

откуда

$$F(b) = 0{,}005 \text{ и } F'(b) = 11{,}167,$$
$$h_1 = -\frac{0{,}005}{11{,}167} = -0{,}000448$$

и

$$c = b + h_1 = 2{,}094552.$$

Такъ какъ h_1 меньше $\frac{1}{10^3}$ и изъ коэффиціентовъ при h_1^2 и h_1^3 первый приблизительно равенъ $\frac{1}{2}$, а второй $\frac{1}{11}$, то отсюда слѣдуетъ, что новое значеніе x будетъ съ ошибкою менѣе $\frac{1}{10^6}$.

Третье приближеніе. — Полагаемъ теперь $x = c = 2{,}094552$; такъ какъ ошибка при этомъ значеніи, равномъ c, меньше $\frac{1}{10^6}$ и, кромѣ того, коэффиціенты при h_1^2 и h_1^3 остаются почти тѣ же самые, то мы можемъ принять за степень приближенія $\frac{1}{10^{12}}$. Составляемъ сначала:

$$c^2 = 4{,}387148\ 080704,$$
$$c^3 = 9{,}189109\ 786734,$$

откуда

$$F(c) = 0{,}000005\ 786734,$$
$$F'(c) = 11{,}161444\ 242112,$$
$$h_2 = -\frac{F(c)}{F'(c)} = -\frac{0{,}000005\ 786734}{11{,}161444\ldots} = -0{,}000000\ 518458$$

и

$$d = c + h_2 = 2{,}094551\ 481542$$

съ точностью до $\frac{1}{10^{12}}$.

Четвертое приближеніе. — Чтобы достигнуть еще большаго приближенія, полагаемъ:

$$x = d = 2{,}094551\ 481542;$$

составляемъ степени x, или, что одно и то же, степени d:

$$d^2 = 4{,}387145\ 908820\ 787166\ 697764.$$
$$d^3 = 9{,}189102\ 963080\ 354769\ 507339;$$

слѣдовательно,

$$F(d) = \quad 0{,}000000\ 000003\ 645230\ 492661,$$
$$F'(d) = 11{,}161437\ 726189\ 3615\ \ldots$$

Отсюда значенiе h_3 будетъ:

$$h_3 = -\frac{F(d)}{F'(d)} = -\frac{0{,}000000\ 000005\ 645230\ 492661}{11{,}161437\ 726189\ 36\ldots},$$

или

$$h_3 = -0{,}000000\ 000000\ 326591\ 482386\ \ldots;$$

поэтому, за новое значенiе x надо принять

$$x = 2{,}094551\ 481542\ 326591\ 482386,$$

точное до $\frac{1}{10^{24}}$. Новое вычисленiе дало бы корень съ точностью до $\frac{1}{10^{48}}$.

§ 266. **Графическое представленiе метода Ньютона.** — Только-что изложенный методъ приближенiя весьма просто можетъ быть представленъ графически; мы должны, какъ намъ кажется, указать здѣсь на этотъ прiемъ, хотя онъ требуетъ нѣкоторыхъ понятiй изъ аналитической геометрiи.

Разысканiе вещественныхъ корней уравненiя: $f(x) = 0$ сводится къ разысканiю точекъ, въ которыхъ кривая:

$$y = f(x)$$

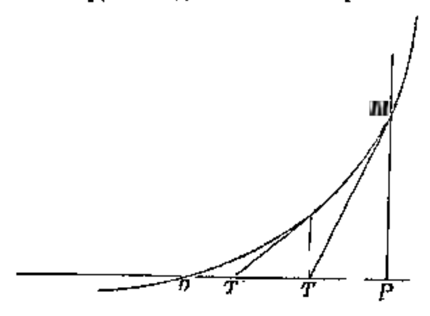
пересѣкаетъ ось x-овъ. Обозначаемъ черезъ a приближенное значенiе корня и черезъ $f(a)$ соотвѣтственное значенiе y; тогда уравненiе касательной къ кривой: $y = f(x)$ въ точкѣ, координаты которой суть a и $f(a)$, будетъ:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Эта касательная пересѣкаетъ ось x-овъ въ точкѣ, для которой абсцисса x, очевидно, есть

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

т.-е. какъ разъ то значеніе, какое получается по методу Ньютона. Поэтому, методъ Ньютона равносиленъ слѣдующему построенію:



Если точка P обозначаетъ приближенное положеніе точки O, въ которой кривая пересѣкаетъ ось x-овъ, то, чтобы получить еще болѣе близкое къ истинному положеніе искомой точки, ведемъ въ той точкѣ M кривой, для которой P служитъ проекціею, касательную MT; точка T будетъ, *вообще*, значительно ближе точки P къ искомому пересѣченію. Повторивъ то же самое построеніе, получимъ новую точку T', еще болѣе близкую къ точкѣ пересѣченія, чѣмъ предыдущая, и т. д.

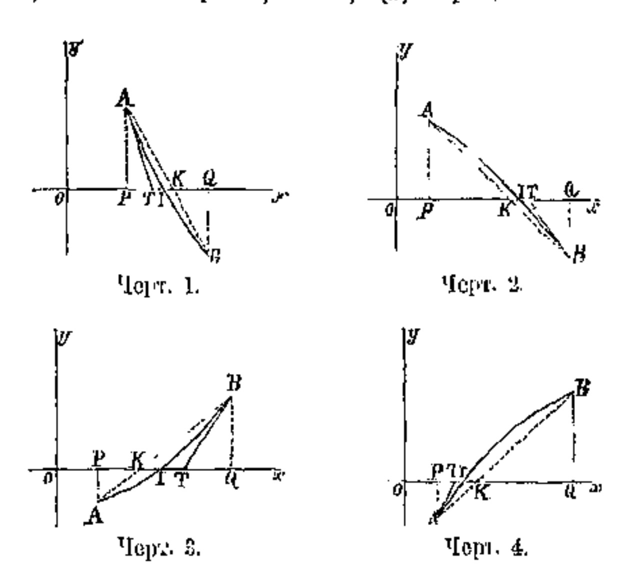
Однако, можетъ случиться, что, прилагая методъ Ньютона, мы получимъ менѣе приближенное значеніе корня, чѣмъ то, которое уже имѣли; слѣдовательно, чтобы дѣйствовать съ увѣренностью, весьма важно обставить этотъ методъ нѣкоторыми неизбѣжными предосторожностями.

§ 267. Случаи, какіе могутъ представиться при приложеніи метода Ньютона.—Предположимъ, что мы нашли два числа: a и b $(a<b)$, между которыми содержится одинъ изъ корней уравненія: $f(x)=0$, и притомъ только одинъ; значитъ, $f(a)$ и $f(b)$ противоположны по знаку. Кромѣ того предположимъ, что эти два числа, a и b, настолько сближены между собою, что $f'(x)$ и $f''(x)$ не измѣняются по знаку при измѣненіи x отъ a до b. Такъ какъ $f'(x)$ сохраняетъ свой знакъ, то $f(x)$ или постоянно возрастаетъ, или постоянно убываетъ; а такъ какъ $f''(x)$ также сохраняетъ свой знакъ, то и $f'(x)$ или постоянно возрастаетъ, или постоянно убываетъ. Другими словами, ордината кривой: $y=f(x)$ или постоянно увеличивается, или постоянно уменьшается; и уголъ, который касательная составляетъ съ осью x-овъ, измѣняется также всегда въ одномъ и томъ же направленіи.

Итакъ, могутъ представиться четыре случая. Если $f(a)>0$, то $f(b)<0$; слѣдовательно, $f(x)$ уменьшается и $f'(x)$ постоянно отрицательна. Кривая принимаетъ въ этомъ случаѣ или такой видъ, какъ на Черт. 1, если $f''(x)$ постоянно положительна, или же такой видъ, какъ на Черт. 2, если $f''(x)$ постоянно отрицательна.

Наоборотъ, если $f(a)$ отрицательна, то $f(b)>0$; слѣдовательно,

$f'(x)$ постоянно положительна. Кривая принимаетъ въ этомъ случаѣ или такой видъ, какъ на Черт. 3, если $f''(x)$ положительна, или же такой видъ, какъ на Черт. 4, если $f''(x)$ отрицательна.



Черт. 1. Черт. 2.

Черт. 3. Черт. 4.

§ 268. Способъ производить дѣйствія съ увѣренностью получить большее приближеніе.—Послѣ предыдущихъ замѣчаній очевидно, что для полученія навѣрное болѣе приближеннаго значенія для неизвѣстной x, чѣмъ одинъ изъ предѣловъ, a или b, между которыми она содержится, нужно въ первомъ случаѣ (Черт. 1) провести касательную въ точкѣ A, соотвѣтствующей низшему предѣлу a, т.-е. положить

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)};\tag{1}$$

во второмъ случаѣ (Черт. 2) нужно провести касательную въ точкѣ B, соотвѣтствующей высшему предѣлу b, т.-е. положить

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(b)};\tag{2}$$

точно такъ же формулу (2) надо приложить въ третьемъ случаѣ (Черт. 3), а формулу (1)—въ четвертомъ (Черт. 4).

Кромѣ того, замѣчаемъ, что въ первомъ и четвертомъ случаяхъ, гдѣ должна быть приложена формула (1), $f(a)$ и $f''(a)$ одного знака, а $f(b)$ и $f''(b)$ противоположныхъ знаковъ; во второмъ же и третьемъ

случаяхъ, гдѣ должна быть приложена формула (2), $f(b)$ и $f''(b)$ также одного знака, а $f(a)$ и $f''(a)$ противоположныхъ знаковъ. Отсюда выводимъ слѣдующее общее правило:

Когда извѣстны два предѣла, a и b, между которыми лежитъ только одинъ изъ корней уравненія: $f(x)=0$ и изъ которыхъ каждый является такимъ образомъ приближеннымъ значеніемъ, и если оба эти предѣла настолько сближены между собою, что $f'(x)$ и $f''(x)$ при измѣненіи x отъ a до b не могутъ измѣниться по знаку, то берется формула:

$$x = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

гдѣ подъ z надо подразумѣвать тотъ изъ двухъ предѣловъ, при которомъ $f(z)$ и $f''(z)$ одного знака.

Результатъ будетъ болѣе приближеннымъ значеніемъ для x, чѣмъ подставленный въ формулу предѣлъ. Подставляя найденное значеніе въ ту же самую формулу, получимъ еще болѣе приближенное значеніе, и т. д.

§ 269. Совмѣстное употребленіе метода Ньютона и метода пропорціональныхъ частей.—Не трудно замѣтить, что методъ пропорціональныхъ частей (**§ 261**) далъ бы приближенное значеніе для x, равное OK, гдѣ K есть точка пересѣченія хорды AB съ осью x-овъ. Въ самомъ дѣлѣ, на каждомъ изъ четырехъ предыдущихъ чертежей

$$x = OP + PK, \text{ и } x = OQ - QK,$$

или

$$x = a + PK, \text{ и } x = b - QK;$$

на тѣхъ же чертежахъ видимъ, что

$$PK = PQ \times \frac{AP}{AP+BQ}, \quad QK = PQ \times \frac{BQ}{AP+BQ},$$

т.-е. что приращенія: PK и QK пропорціональны измѣненіямъ ординатъ.

Кромѣ того замѣчаемъ, что если методъ Ньютона даетъ значеніе для x меньшее истиннаго, то методъ пропорціональныхъ частей даетъ значеніе большее истиннаго, и *обратно*. Слѣдовательно, точное значеніе x содержится между этими двумя значеніями, и допускаемая при этомъ ошибка, очевидно, меньше ихъ разности.

КОНСПЕКТЪ.

§ 253. Какія нужно выполнить предварительныя дѣйствія, чтобы рѣшить численное уравненіе.—**§ 254.** Подстановка цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ.— **§ 255.** Выборъ промежутковъ, въ которыхъ должны быть производимы новыя подстановки.—**§ 256.** Теорема, дающая предѣлъ отступленій, какія можетъ представить кривая, употребляемая при разысканіи корней.—**§ 257.** Подстановка чиселъ, измѣняющихся равномѣрно на одну десятую —**§ 258.** Упрощеніе вычисленій въ томъ случаѣ, когда уравненіе —третьей степени.—**§ 259.** Приложеніе къ примѣру. Вычисленіе корней съ точностью до 0,1. **§ 260** Вычисленіе съ точностью до 0,01. -**§ 261.** Употребленіе пропорціи, сходной съ тою, которою пользуются въ теоріи логариѳмовъ. -**§ 262.** Примѣръ уравненія, къ которому прилагаются съ трудомъ предыдущія правила.—**§ 263.** Методъ Ньютона.—**§§ 264** и **265.** Приложенія къ двумъ примѣрамъ.- **§ 266.** Графическое представленіе метода Ньютона. -**§§ 267** и **268.** Поправка къ методу, дающая возможность производить дѣйствія съ увѣренностью получить большее приближеніе. -**§ 269.** Совмѣстное употребленіе метода Ньютона и метода пропорціональныхъ частей.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Опредѣлить вещественный корень уравненія:

$$x^3-2x-5=0.$$

Отв.:

$$x=2{,}09455.$$

II. Опредѣлить вещественный корень уравненія.

$$x^3-5x-3=0.$$

Отв.:

$$x=2{,}4908.$$

III. Опредѣлить вещественные корни уравненія:

$$x^6-2x^4-13x^3+39x^2-20x+4=0.$$

Отв.:

$$x=-4{,}00317.$$

IV. Опредѣлить вещественные корни уравненія:

$$x^3-8x^2-6x+9=0.$$

Отв.:

$$x_1=8{,}577, \quad x_2=3{,}5577, \quad x_3=-3{,}2438.$$

V. Опредѣлить вещественные корни уравненія:

$$x^3 - 8x + 1 = 0.$$

Отв.:

$$x_1 = 2{,}88879,\quad x_2 = 2{,}7639,\quad x_3 = 0{,}12509.$$

VI. Раздѣлить полусферу радіуса 1 на двѣ равновеликія части плоскостью, параллельною основанію.

Обозначая черезъ x разстояніе параллельной плоскости отъ центра, находимъ:

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Рѣшеніе трансцендентныхъ уравненій.

§ 270. Цѣль этой главы.—Мы ограничимся въ этой главѣ разборомъ нѣкоторыхъ трансцендентныхъ уравненій, встрѣчающихся въ прикладной математикѣ; на нихъ мы сполна изложимъ тѣ методы, къ которымъ наиболѣе часто прибѣгаютъ математики для рѣшенія такихъ уравненій.

I. Приложеніе теоріи разностей къ рѣшенію трансцендентныхъ уравненій.

§ 271. Методъ рѣшенія.—Методъ, который мы ниже прилагаемъ къ двумъ примѣрамъ, употребляется очень часто; онъ заключается въ подстановкѣ въ данное уравненіе равномѣрно измѣняющихся чиселъ, совершенно такъ же, какъ и въ случаѣ алгебраическаго уравненія. Когда найдены двѣ подстановки, дающія въ первой части результаты съ противоположными знаками, то заключаемъ, что существуетъ одинъ корень между соотвѣтственными значеніями x; въ этомъ промежуткѣ подставляемъ болѣе сближенныя между собою числа, благодаря чему искомый корень можетъ быть сжатъ между двумя новыми, болѣе тѣсными, предѣлами. Послѣ этого разсматриваемъ таблицу, содержащую: 1) значенія, придаваемыя неизвѣстной, 2) соотвѣтственныя значенія первой части уравненія, 3) разности различныхъ порядковъ. Если случится, что

разности нѣкотораго порядка, напр. третьяго, незначительны, то допускаемъ, что наша функція можетъ быть замѣнена въ разсматриваемомъ промежуткѣ, безъ чувствительной погрѣшности, алгебраическою функціею (второй степени, если разность третьяго порядка принята за нуль). Эту послѣднюю находимъ по теоріи интерполированія и подставляемъ ее въ первую часть даннаго уравненія; тогда вся задача сведется къ рѣшенію уравненія второй степени.

Если разности уже второго порядка незначительны, то заданное уравненіе приведется къ уравненію первой степени, а самый методъ перейдетъ въ употребленіе пропорціональныхъ частей, которыми пользуются, между прочимъ, въ вычисленіяхъ съ логариѳмическими таблицами.

§ 272. Примѣръ I.—Дано уравненіе:

$$e^x - e^{-x} = 5,284\,x,$$

встрѣчающееся въ механикѣ при изученіи цѣпной линіи.

Мы видимъ, что это уравненіе не измѣняется при измѣненіи x на $(-x)$; слѣдовательно, каждому корню соотвѣтствуетъ другой, ему равный, но съ противоположнымъ знакомъ. Чтобы лучше изучить это уравненіе, полагаемъ:

$$y = e^x - e^{-x} \text{ и } y = 5,284x;$$

тогда у насъ будутъ уравненія двухъ линій, абсциссы точекъ пересѣченія которыхъ будутъ корнями даннаго уравненія. Первая изъ этихъ двухъ линій AA' есть трансцендентная кривая, состоящая только изъ одной безконечной вѣтви, идущей въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ. Эта вѣтвь, имѣющая асимптотами логариѳмическія линіи:

$$x = \log y \text{ и } -x = \log y,$$

проходитъ черезъ начало координатъ, которое въ то же время есть ея центръ. Вторая изъ двухъ линій BB' представляетъ прямую, также проходящую черезъ начало. Такъ какъ обѣ линіи проходятъ

черезъ начало, то уравненіе удовлетворяется при $x=0$; кромѣ того, видно, что онѣ имѣютъ только одно пересѣченіе со стороны положительныхъ x-овъ; слѣдовательно, уравненіе имѣетъ одинъ положительный корень, который мы теперь и опредѣлимъ.

Сначала переписываемъ уравненіе въ видѣ:

$$u_x = e^x - e^{-x} - 5{,}284x = 0$$

и затѣмъ отыскиваемъ значенія, которыя принимаетъ эта функція при цѣлыхъ значеніяхъ перемѣнной x. Находимъ:

$$\begin{array}{llll} x=0, & e^x=1, & e^{-x}=1, & u_0=0; \\ x=1, & e^x=2{,}718, & e^{-x}=0{,}368, & u_1=-2{,}934; \\ x=2, & e^x=7{,}389, & e^{-x}=0{,}135, & u_2=-3{,}314; \\ x=3, & e^x=20{,}086, & e^{-x}=0{,}050, & u_3=+4{,}184. \end{array}$$

Итакъ, корень содержится между 2 и 3.

Отыскивая теперь значенія u, соотвѣтствующія $x=2{,}5$, $x=2{,}6$, $x=2{,}7$, . . . , пишемъ:

$$\begin{array}{ll} x=2{,}5, & u=-1{,}1096; \\ x=2{,}6, & u=-0{,}3489; \\ x=2{,}7, & u=+0{,}5447; \end{array}$$

слѣдовательно, корень содержится между 2,6 и 2,7.

Дѣля этотъ промежутокъ на десять равныхъ частей и вычисляя промежуточныя значенія u съ ихъ разностями, мы составимъ слѣдующую таблицу:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$
2,64	—0,00792	8871	140
2,65	+0,08079	9011	142
2,66	+0,17090	9153	145
2,67	+0,26243	9298	145
2,68	+0,35541	9443	
2,69	+0,44984		

Такъ какъ разности второго порядка весьма мало различаются между собою, то функцію u_x, взятую между $x=2{,}64$ и $x=2{,}65$, можно разсматривать, какъ алгебраическую функцію второй степени; приложимъ къ ней формулу интерполированія Ньютона:

$$u_x = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \Delta^2 u_0,$$

въ которой должно положить:

$$x_0 = 2{,}64;\ h = 0{,}01;\ u_0 = -0{,}00792;$$
$$\Delta u_0 = 0{,}08871;\ \Delta^2 u_0 = 0{,}00140.$$

Разность $(x - x_0)$ есть поправка къ приближенному значенію x_0 и, значитъ, $\frac{x - x_0}{h}$ будетъ числомъ сотыхъ долей этой поправки. Итакъ, называя черезъ z число сотыхъ долей, какое должно прибавить къ 2,64. чтобы получить корень, можемъ написать:

$$u_x = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_0;$$

а такъ какъ u_x должно равняться нулю, то отсюда выводимъ:

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} - \frac{z(z-1)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}. \qquad (1)$$

При рѣшеніи этого уравненія второй степени пользуемся тѣмъ, что z очень мало, и отбрасываемъ второй членъ во второй части, т.-е. принимаемъ за первое приближеніе

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} = 0{,}0892797.$$

Далѣе, замѣняя z этимъ значеніемъ во второй части уравненія (1), находимъ болѣе точное рѣшеніе:

$$z = 0{,}089921.$$

Слѣдовательно, значеніе x есть

$$x = \pm 2{,}64089921.$$

§ 273. Примѣръ II.—Рѣшить уравненіе:

$$a \sin^4 x = \sin(x - q), \qquad (1)$$

имѣющее большое значеніе въ вычисленіи планетныхъ орбитъ. Пусть будетъ дано:

$$\log a = 0{,}599\ 7582,$$
$$q = 13^\circ 40' 5'',01.$$

Такъ какъ наши обычныя таблицы содержатъ не самыя значенія натуральныхъ синусовъ, а ихъ логариѳмы, то мы возьмемъ обыкновенные логариѳмы отъ обѣихъ частей уравненія, что, впрочемъ, значительно упроститъ все вычисленіе. Тогда уравненіе приметъ видъ:

$$\log a + 4\log\sin x = \log\sin(x - q),$$

или

$$u_x = \log a + 4\log\sin x - \log\sin(x - q) = 0. \qquad (2)$$

Чтобы получить первое приближенное значеніе x, полагаемъ сначала:

$$x = q = 13^\circ 40' 5'',01,$$

откуда

$$\begin{array}{rl} \log\sin x = & \bar{1},3734 \\ \hline 4\log\sin x = & \bar{3},4936 \\ \log a = & 0,5998 \\ \text{Доп.} \log\sin(x-q) - 10 = & \infty \\ \hline \end{array}$$

итакъ,

$$u_x = +\infty.$$

Точно такъ же найдемъ при $x = 14^\circ$:

$$\begin{array}{rl} \log\sin x = & \bar{1},3837 \\ \hline 4\log\sin x = & \bar{3},5348 \\ \log a = & 0,5998 \\ \text{Доп.} \log\sin(x-q) - 10 = & 2,2371 \\ \hline \end{array}$$

итакъ,

$$u_x = +0,3717.$$

Изъ этого быстраго уменьшенія функціи u_x мы можемъ съ нѣкоторою вѣроятностью заключить, что $x = 14^\circ$ есть весьма приближенное значеніе одного изъ корней уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, непосредственныя подстановки даютъ:

$$x = 14^\circ 20', \quad u_x = +0,1096,$$
$$x = 14^\circ 30', \quad u_x = +0,0322,$$
$$x = 14^\circ 40', \quad u_x = -0,0277,$$

откуда видно, что корень содержится между $14^\circ 30'$ и $14^\circ 40'$.

Дѣля этотъ промежутокъ на двѣ равныя части, находимъ:

$$\text{при } x = 14^\circ 35' \quad u_x = +0,0005;$$

слѣдовательно, корень заключается между 14°35′ и 14°40′ и лежитъ весьма близко къ первому изъ этихъ двухъ чиселъ.

Чтобы получить болѣе приближенное значеніе x, ищемъ съ 7 цифрами послѣ запятой значенія функціи u_x, соотвѣтствующія значеніямъ x, взятымъ черезъ каждыя десять секундъ, начиная съ $x = 14°35′$; для этого пишемъ слѣдующую таблицу по послѣдовательнымъ разностямъ:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$
14°35′	+0,0004870	0,0009924	0,0000040
14°35′10″	0,0005054	—0,0009884	0,0000040
14°35′20″	0,0014938	0,0009844	0,0000039
14°35′30″	0,0024782	0,0009805	
14°35′40″	—0,0034587		

Отсюда видно, что для значеній x, идущихъ въ ариѳметической прогрессіи и достаточно близкихъ между собою, вторыя разности отъ функціи u_x почти равны между собою; слѣдовательно, первая часть даннаго уравненія въ тѣхъ тѣсныхъ предѣлахъ, которые мы намѣтили для нея въ этой таблицѣ, можетъ быть разсматриваема, какъ алгебраическая функція второй степени. Поступая такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, находимъ:

$$0 = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 u_0;$$

подставляя сюда изъ послѣдней таблицы значенія u_0, Δu_0, и $\Delta^2 u_0$:

$$u_0 = +0,000\ 4870,$$
$$\Delta u_0 = -0,000\ 9924,$$
$$\Delta^2 u_0 = +0,000\ 0040,$$

получимъ:

$$0 = +4870 - 9924z + 20(z^2 - z),$$

или

$$z^2 - 497,2z + 243,5 = 0;$$

изъ корней этого квадратнаго уравненія выбираемъ меньшій (большій превосходитъ 596), именно

$$z = 0,4902267\ \ldots$$

При этомъ вычисленіи мы за единицу промежутка принимали дугу

въ 10 секундъ,—поэтому поправка равна 4",902 и корень съ точностью до тысячныхъ долей секунды будетъ:

$$x = 14^{0}35'4'',902.$$

Повѣряемъ найденное значеніе:

$$\begin{array}{r} x-q = 54'59'',892 \\ \log\sin x = 1,401\ 07445 \\ \hline 4\log\sin x = 3,604\ 2978 \\ \log a = 0,599\ 7582 \\ \text{Доп.}\log\sin(x-q)-10 = 1,795\ 9440 \\ \hline \end{array}$$

итакъ, $u_x = 0;$

отсюда заключаемъ, что найденное значеніе точно.

Уравненіе (1), будучи трансцендентнымъ, можетъ имѣть кромѣ этого перваго вещественнаго корня одинъ или нѣсколько другихъ, или даже безчисленное ихъ множество. Въ самомъ дѣлѣ, продолжая разысканіе корней, находимъ только еще при первомъ движеніи по окружности круга три другихъ корня:

$$x_1 = 32^{0}2'28'',$$
$$x_2 = 137^{0}27'59'',$$
$$x_3 = 193^{0}4'18'';$$

сверхъ того, каждому изъ этихъ четырехъ значеній x соотвѣтствуетъ безчисленное множество другихъ, положительныхъ или отрицательныхъ, при чемъ всѣ они заключаются въ общемъ выраженіи:

$$x + k \times 360^{0},$$

гдѣ k какое-угодно, положительное или отрицательное, цѣлое число.

II. Рѣшеніе трансцендентныхъ уравненій по методу послѣдовательныхъ подстановокъ.

§ 274. Методъ послѣдовательныхъ подстановокъ. — Этотъ методъ очень удобенъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ самое условіе задачи допускаетъ его примѣненіе. Вотъ тотъ принципъ, въ общемъ видѣ, на которомъ онъ основанъ.

Предположимъ, что уравненіе приведено къ виду:

$$x=\varphi(x)$$

и пусть a обозначаетъ найденное приближенное значеніе его корня; слѣдовательно, у насъ будетъ приближенное равенство:

$$x=\varphi(a);$$

называя это значеніе черезъ b и вводя его въ данное уравненіе, находимъ:

$$x=\varphi(b);$$

также, называя это третье значеніе черезъ c, находимъ:

$$x=\varphi(c)=d.$$

Рядъ чиселъ: $a, b, c, d, \dots$, который мы можемъ продолжить сколь-угодно далеко, иногда весьма быстро приближается къ истинному значенію корня.

Чтобы опредѣлить степень этой сходимости, назовемъ черезъ $(a+h)$ точное значеніе корня; тогда

$$a+h=\varphi(a+h).$$

А такъ какъ дробь

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$$

весьма мало отличается отъ производной $\varphi'(a)$, то обозначая эту дробь черезъ $\varphi'(a)+\varepsilon$, напишемъ:

$$\varphi(a+h)=h\varphi'(a)+\varphi(a)+h\varepsilon,$$
$$a+h=h\varphi'(a)+\varphi(a)+h\varepsilon,$$

откуда

$$a+h-\varphi(a)=h\varphi'(a)+h\varepsilon;$$

слѣдовательно, принимая $\varphi(a)$ за корень, мы дѣлаемъ ошибку, равную произведенію $h\varphi'(a)$ предыдущей ошибки h на $\varphi'(a)$, если не считать $h\varepsilon$, какъ очень малой величины. Отсюда заключаемъ, что ошибка уменьшается, если $\varphi'(a)$ меньше 1; въ противномъ случаѣ, нашъ методъ неприложимъ.

§ 275. Примѣръ.—Опредѣлимъ по этому методу вещественные корни уравненія:

$$\frac{10^x}{\sqrt{x}} = 329476.$$

Очевидно, что это уравненіе не можетъ имѣть отрицательныхъ корней, потому что при отрицательномъ x радикалъ вышелъ бы мнимымъ; итакъ, намъ предстоитъ заняться разысканіемъ только положительныхъ корней. Вычисленіе значительно упростится, если мы возьмемъ обыкновенные логариѳмы отъ обѣихъ частей; тогда уравненіе преобразуется въ слѣдующее:

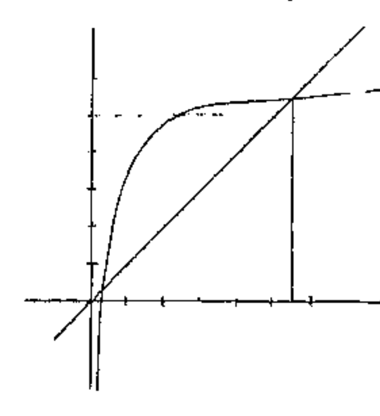
$$x = \frac{1}{2}\log x + 5{,}5178238 \ldots \qquad (1)$$

и будетъ какъ разъ того вида, къ которому можно приложить нашъ методъ.

Полагая

$$y = x \text{ и } y = \frac{1}{2}\log x + 5{,}5178238,$$

мы получаемъ двѣ линіи, абсциссы точекъ пересѣченія которыхъ суть корни даннаго уравненія. Первая изъ нихъ есть прямая, биссектриса угла между прямоугольными осями; вторая логариѳмическая линія, состоящая всего изъ одной безконечной вѣтви, асимптотою для которой служитъ ось y. Эти линіи пересѣкаются въ двухъ точкахъ, изъ которыхъ одна лежитъ весьма близко къ началу координатъ, а абсцисса другой заключается между 5 и 6. Другихъ точекъ пересѣченія нѣтъ и, слѣдовательно, уравненіе имѣетъ только два положительныхъ корня.



Такъ какъ значеніе извѣстнаго члена въ уравненіи (1) близко къ 6, то полагаемъ сперва $x = 6$ и подставляемъ это значеніе во вторую часть уравненія (1); тогда получится болѣе приближенное значеніе для x, именно

$$x = \frac{1}{2}\log 6 + 5{,}5178 = 5{,}9069.$$

Подставляя это второе значеніе x въ уравненіе (1), находимъ:

$$\frac{1}{2}\log 5{,}9069 + 5{,}517\ 8238 = 5{,}903\ 5036.$$

Третья такая же подстановка дастъ:

$$x = \frac{1}{2}\log 5{,}903\ 5036 + 5{,}517\ 8238 = 5{,}903\ 3787;$$

затѣмъ,

$$x = \frac{1}{2}\log 5{,}903\ 3787 + 5{,}517\ 8238 = 5{,}903\ 3741,$$

далѣе,

$$x = \frac{1}{2}\log 5{,}903\ 3741 + 5{,}517\ 8238,$$

или

$$x = 5{,}903\ 3740.$$

Послѣдній результатъ полученъ съ семью точными цифрами послѣ запятой; въ самомъ дѣлѣ,

$$\log x = \log 5{,}903\ 3740 = 0{,}771\ 1004$$
$$\frac{1}{2}\log x = 0{,}385\ 5502$$
$$5{,}517\ 8238,$$

откуда $$\frac{1}{2}\log x + 5{,}5178\ldots = 5{,}903\ 3740 = x.$$

Общія разсужденія, изложенныя въ предыдущемъ параграфѣ, въ примѣненіи къ данному примѣру даютъ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\log x + 5{,}5178238,$$
$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\log e}{x},$$

а такъ какъ x почти равно 6, то это значеніе $\varphi'(x)$ весьма мало отличается отъ $\frac{1}{20}$; отсюда заключаемъ, что каждое изъ полученныхъ значеній почти въ двадцать разъ приближеннѣе предыдущаго.

Намъ еще остается вычислить второй корень уравненія:

$$x - \frac{1}{2}\log x - 5{,}5178238 = 0, \qquad (1)$$

содержащійся между 0 и 1. Замѣчая, что x есть весьма малая дробь, отбрасываемъ первый членъ въ уравненіи; въ такомъ случаѣ оно дастъ:

$$\frac{1}{2}\log x = -5{,}517\ 8238,$$
$$\log x = -11{,}035\ 6476$$
$$= \overline{12}{,}964\ 3524,$$

откуда $x = 0{,}00000\ 00000\ 09211\ 97$

съ семнадцатью точными цифрами послѣ запятой.

III. Рѣшеніе трансцендентныхъ уравненій по методу Ньютона.

§ 276. Изложеніе метода. — Методъ Ньютона прилагается безъ измѣненія къ разысканію корней трансцендентнаго уравненія, лишь бы только знать всякій разъ первое приближенное значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дано уравненіе:

$$F(x) = 0$$

и пусть a будетъ приближеннымъ значеніемъ корня, точное его значеніе мы обозначимъ черезъ $(a+h)$; тогда

$$F(a+h) = 0.$$

Далѣе, такъ какъ отношеніе

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

по своему значенію близко къ $F'(a)$, то

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = F'(a) + \varepsilon,$$

гдѣ ε обозначаетъ весьма малое число, а отсюда, замѣчая, что $F(a+h) = 0$, выводимъ:

$$h = -\frac{F(a)}{F'(a)+\varepsilon};$$

слѣдовательно, $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ есть приближенное значеніе h.

§ 277. Примѣръ I.—Дано уравненіе:

$$x^x - 100 = 0.$$

Сначала подставляемъ на мѣсто перемѣнной x натуральныя числа; находимъ:

$$0^0 = 1,\ 1^1 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^3 = 27,\ 4^4 = 256.$$

Отсюда заключаемъ, что наше уравненіе имѣетъ только одинъ вещественный корень и что этотъ корень содержится между 3 и 4. Вычисленіе значительно упростится, если мы вмѣсто того, чтобы рѣшать уравненіе въ заданномъ видѣ, возьмемъ обыкновенные логариѳмы отъ обѣихъ его частей; тогда будетъ:

$$x \log x = 2.$$

Такимъ образомъ,

$$F(x) = x \log x - 2,$$

откуда

$$F'(x) = \log x + \log e,$$

гдѣ e обозначаетъ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ. Эти значенія $F(x)$ и $F'(x)$, будучи подставлены въ общую формулу, выражающую поправку по методу Ньютона, дадутъ для h:

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = -\frac{x\log x - 2}{\log x + \log e} = \frac{2 - x\log x}{\log e + \log x}.$$

Первое приближеніе.—Выше мы нашли, что значеніе x содержится между 3 и 4. Полагаемъ сначала $x = 3{,}5$ и вычисляемъ съ 3 цифрами послѣ запятой:

$$\begin{aligned} x &= 3{,}5 \\ \log x &= 0{,}544 \\ x\log x &= 1{,}904 \\ 2 - x\log x &= 0{,}096; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log e &= 0{,}434 \\ \log x &= 0{,}544 \\ \log e + \log x &= 0{,}978; \end{aligned}$$

итакъ,

$$h = \frac{0{,}096}{0{,}978} = 0{,}098$$

и приближенное значеніе x будетъ:

$$x = 3{,}598.$$

Второе приближеніе.—Пишемъ.

$$x = 3{,}598 \qquad\qquad \log e = 0{,}434\ 2945$$
$$\log x = 0{,}556\ 0612 \qquad\qquad \log x = 0{,}556\ 0612$$
$$x\log x = 2{,}000\ 7082 \qquad\qquad \log e + \log x = 0{,}990\ 3557;$$
$$x\log x - 2 = 0{,}000\ 7082;$$

итакъ,

$$h = -\frac{0{,}000\ 7082}{0{,}990\ 3557} = \quad 0{,}00071\ 50966$$

и, слѣдовательно,

$$x = 3{,}598 \quad 0{,}00071\ 510 =$$
$$= 3{,}597\ 2849.$$

Третье приближеніе.—Теперь, чтобы имѣть еще болѣе приближенное значеніе x, полагаемъ

$$x = 3{,}597285;$$

въ такомъ случаѣ

$$\log x = 0{,}55594\ 04378 \qquad\qquad \log x \quad 0{,}55594\ 04378$$
$$x\log x = 1{,}99909\ 997677 \qquad\qquad \log e = 0{,}43429\ 44819$$
$$x\log x \quad 2 = 0{,}00000\ 002323 \qquad\qquad \log x + \log e = 0{,}99023\ 49197,$$

откуда

$$h = \frac{0{,}00000\ 002323}{0{,}99023\ 49197} = 0{,}00000\ 0023458$$

и значеніе x, съ десятью точными цифрами послѣ запятой, будетъ:

$$x = 3{,}59728\ 50235.$$

§ 278 Примѣръ II.—Рѣшить уравненіе.

$$x \quad \epsilon\sin x = a,$$

гдѣ

$$\epsilon = 0{,}245\ 31615,$$

а, значитъ, $\log\epsilon = 1{,}389\ 7262$

и $a = 329^\circ 44' 27'',66.$

Это уравненіе встрѣчается въ ученіи объ эллиптическомъ движеніи планетъ при разысканіи положенія свѣтила въ его орбитѣ въ данное время.

Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію этого уравненія, покажемъ, какъ выразить въ градусахъ дугу круга, выраженную въ частяхъ радіуса, и обратно. Извѣстно, что при радіусѣ $=1$ полуокружность круга, или 180^0, равна

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ \ldots;$$

поэтому, дуга, равная радіусу, будетъ

$$1 = \frac{180^0}{\pi} = 57^0{,}29577\ 95130\ 82321\ \ldots =$$
$$= 57^0 17' 44''{,}806247\ \ldots = 206264''{,}806247\ \ldots$$

Итакъ. *нужно умножить на это послѣднее число длину дуги, данной въ частяхъ радіуса, чтобы выразить ее въ обычной мѣрѣ для дугъ; обратно, дѣля число секундъ, содержащихся въ дугѣ круга, на* 206264,806247 . . . , *получимъ ея длину въ частяхъ радіуса.*

Напр., желая выразить въ частяхъ радіуса дугу круга $a = 329^0 44' 27''{,}66$, пишемъ:

$$\begin{array}{r} a = 1186067''{,}66 \\ \hline \log a = 6{,}074\ 4755 \\ \log 206264''{,}8 = 5{,}314\ 4251 \\ \hline \log x = 0{,}760\ 0504, \end{array}$$

отсюда, въ частяхъ радіуса,

$$x = 5{,}755067;$$

значитъ дуга въ $329^0 44' 27''{,}66$ приблизительно равна $5\frac{3}{4}$ радіуса.

Иногда это правило обращенія даютъ въ другомъ видѣ, хотя по существу оно остается тѣмъ же самымъ. Обозначаемъ черезъ α длину дуги въ частяхъ радіуса, и черезъ α' число секундъ, содержащихся въ ней; если мы раздѣлимъ α на длину дуги въ одну секунду, выраженную въ частяхъ радіуса, то, очевидно, въ частномъ получимъ α'. Такимъ образомъ $\frac{\alpha}{\operatorname{arc} 1''} = \alpha'$. Зная же, что дуга въ одну секунду отличается отъ своего синуса менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{10^{16}}$, мы можемъ написать:

$$\frac{\alpha}{\sin 1''} = \alpha', \text{ и } \alpha = \alpha' \sin 1''.$$

Итакъ, *чтобы обратить въ секунды дугу, выраженную въ частяхъ радіуса, нужно раздѣлить ея длину на* $\sin 1''$; *и обратно, чтобы выразить въ частяхъ радіуса дугу, вычисленную въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, нужно ее сначала обратить въ секунды, а затѣмъ умножить результатъ на* $\sin 1''$.

Понятно, что логариѳмъ $\sin 1''$ находится по таблицамъ, на первой же страницѣ.

Теперь можно приступить къ рѣшенію заданнаго уравненія. Сначала опредѣляемъ квадрантъ круга, въ которомъ находится дуга x, и для этого подставляемъ вмѣсто x въ выраженія:

$$F(x) = x - \varepsilon \sin x - 5{,}755067$$

линейныя значенія 0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0; находимъ:

$x = 0^0$	$\varepsilon \sin x = 0$	$F(x) = -5{,}75\ldots$
$x = 90^0 = \frac{\pi}{2}$	$\varepsilon \sin x = 0{,}25$	$F(x) = -4{,}43\ldots$
$x = 180^0 = \pi$	$\varepsilon \sin x = 0$	$F(x) = -2{,}61\ldots$
$x = 270^0 = \frac{3\pi}{2}$	$\varepsilon \sin x = \quad 0{,}15$	$F(x) = -0{,}79\ldots$
$x = 360^0 = 2\pi$	$\varepsilon \sin x = 0$	$F(x) = +0{,}53\ldots$

Отсюда видно, что дуга x содержится между 270^0 и 360^0, что, впрочемъ, легко было предвидѣть; и такъ какъ синусъ ея отрицателенъ, то сама она меньше $a = 329^0 44' 27'',66$.

Первое приближеніе, при помощи пропорціональныхъ частей.—Сперва полагаемъ $x = 320^0$ и вычисляемъ соотвѣтственное значеніе $F(x)$; чтобы получить это выраженіе въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, умножимъ, по правилу, членъ $\varepsilon \sin x$ на $206264{,}8\ldots$, или, что одно и то же, раздѣлимъ его на $\sin 1''$; у насъ будетъ:

$$\sin x = \sin 320^0 = -\sin 40^0$$
$$\log(-\sin x) = \bar{1}{,}8081$$
$$\log \varepsilon = \bar{1}{,}3897$$
$$\underline{\log 206264 = 5{,}3144}$$
$$\log(-\varepsilon \sin x \times 206264'') = 4{,}5122;$$

итакъ, $$206264'' \times x \varepsilon \sin x = -32525'' = -9^0 2' 5'';$$

далѣе,

$$
\begin{aligned}
x &= 320^0 \\
-\varepsilon\sin x &= +9^0 2' 5'' \\
-a &= -329^0 44' 28'' \\
\hline
F(x) &= -42'23'' = -2543'';
\end{aligned}
$$

значитъ, дуга въ 320^0 мала.

Точно такъ же мы получили бы при $x=330^0$

$$F(x) = +7^0 17' 12'' = 26232'',$$

а это показываетъ, что дуга въ 330^0 велика; поэтому, корень уравненія содержится между 320^0 и 330^0.

Такъ какъ разность этихъ двухъ значеній:

$$
\begin{aligned}
F(320^0) &= -2543'', \\
F(330^0) &= +26232''
\end{aligned}
$$

равна $28775''$, для промежутка въ 10^0, то мы можемъ принять за приближенное значеніе x

$$x = 320^0 + \frac{2543}{28775} \times 10^0 = 320^0 53'.$$

Приложеніе метода Ньютона.—Пишемъ:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x - \varepsilon \sin x - 329^0 44' 27'',06, \\
F'(x) &= 1 - \varepsilon \cos x.
\end{aligned}
$$

Выбираемъ приближенное значеніе x за отправную точку для нашихъ вычисленій. Пусть

$$\alpha = 320^0 53' \text{ и } x = \alpha + h;$$

въ такомъ случаѣ

$$h = -\frac{F(\alpha)}{F'(\alpha)} = -\frac{\alpha - \varepsilon\sin\alpha - 329^0 44' 27'',06}{1 - \varepsilon\cos\alpha},$$

$$
\begin{aligned}
\log(-\sin\alpha) &= \bar{1},799\ 0616 \\
\log\varepsilon &= \bar{1},389\ 7262 \\
\log 206264 &= 5,314\ 4251 \\
\hline
\log(-\varepsilon\sin\alpha) &= 4,504\ 1129 \\
-\varepsilon\sin\alpha &= 31923'',67 \\
&= 8^0 52' 3'',67
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\cos\alpha &= \bar{1},889\ 7850 \\
\log\varepsilon &= \bar{1},389\ 7262 \\
\hline
\log(\varepsilon\cos\alpha) &= \bar{1},279\ 5112 \\
\varepsilon\cos\alpha &= 0,190\ 3317 \\
F'(\alpha) = 1 - \varepsilon\cos\alpha &= 0,809\ 6683.
\end{aligned}
$$

Итакъ,

$$\alpha = 320^\circ 53'$$
$$-\varepsilon \sin\alpha = +8^\circ 52' 3'',67$$
$$-a = -329^\circ 44' 27'',66$$
$$F(\alpha) = 36'',01.$$

Значитъ,

$$h = -\frac{F(\alpha)}{F'(\alpha)} = -\frac{36'',01}{0,8096683} = -44'',48\ldots$$

и, слѣдовательно,

$$x = 320^\circ 53' - 44'',48 = 320^\circ 52' 15'',52$$

съ точностью до сотыхъ долей секунды.

Повѣримъ полученный результатъ. Мы нашли:

$$x = 320^\circ 52' 15'',52;$$

отсюда

$$\sin x = -\sin 39^\circ 7' 44'',48$$

$$\log(-\sin x) = \bar{1},800\ 0767$$
$$\log\varepsilon = \bar{1},389\ 7262$$
$$\log 206264'' = 5,314\ 4251$$
$$\log(-\varepsilon\sin x) = 4,504\ 2280,$$

что даетъ $\quad -\varepsilon \sin x = 31932'',14 = 8^\circ 52' 12'',14;$

далѣе,

$$x = 320^\circ 52' 15'',52$$
$$\varepsilon \sin x = +8^\circ 52' 12'',14$$
$$-a = -329^\circ 44' 27'',66$$
$$F(x) = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что методъ Ньютона далъ намъ, посредствомъ только одной выкладки, точное значеніе дуги x.

IV. Рѣшеніе уравненія: $x = \operatorname{tang} x$.

Это уравненіе встрѣчается въ теоріи теплоты и въ теоріи колебаній упругихъ тѣлъ.

§ 279. Общія положенія.—1. Такъ какъ уравненіе не измѣняется при измѣненіи x на $(-x)$, то, значитъ, каждому корню соотвѣтствуетъ другой ему равный, но съ противоположнымъ знакомъ. Поэтому, мы займемся разысканіемъ только положительныхъ корней.

2. При x положительномъ тангенсъ тоже положителенъ, потому что $(x - \tan x)$ должно выйти нулемъ; иными словами, дуги x оканчиваются въ 1-омъ, въ 3-емъ, въ 5-омъ, ... квадрантѣ круга и ихъ значенія заключаются между $n\pi$ и $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, гдѣ π равно полуокружности круга, или, что одно и то же, 180^0, а n какое-угодно цѣлое и положительное число.

3. Въ каждомъ изъ этихъ квадрантовъ дуга x идетъ, увеличиваясь, начиная съ $x = n\pi$ до $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$; тангенсъ увеличивается непрерывно отъ нуля до безконечности; слѣдовательно, въ каждомъ изъ указанныхъ квадрантовъ есть вещественный корень и, притомъ, только одинъ, данное же уравненіе допускаетъ безчисленное множество положительныхъ и отрицательныхъ корней.

4. Уравненіе удовлетворяется при $x = 0$; поэтому, корень, соотвѣтствующій первому квадранту, есть нуль. Для всѣхъ же другихъ значеній x, заключающихся въ первомъ квадрантѣ, какъ извѣстно, $\tan x > \operatorname{arc} x$.

5. Выражая n-ый корень черезъ $(n\pi + \alpha_n)$, гдѣ α_n меньше $\frac{\pi}{2}$, замѣчаемъ, что эта дуга α_n тѣмъ больше, чѣмъ больше n. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n'\pi + \alpha_{n'}$ будетъ рѣшеніемъ, соотвѣтствующимъ числу n', высшему, чѣмъ n; тогда

$$\tan(n\pi + \alpha_n) = \tan \alpha_n = n\pi + \alpha_n,$$
$$\tan(n'\pi + \alpha_{n'}) = \tan \alpha_{n'} = n'\pi + \alpha_{n'},$$

но такъ какъ n' больше n, то разность $n'\pi + \alpha_{n'} - n\pi - \alpha_n$, равная $(n' - n)\pi + \alpha'_n - \alpha_n$, положительна, потому что $(n' - n)\pi$ не меньше π; иначе говоря, $(n'\pi + \alpha_{n'})$ превышаетъ $(n\pi + \alpha_n)$, т.-е. $\tan \alpha_{n'}$ больше $\tan \alpha_n$; слѣдовательно. $\alpha_{n'}$ больше α_n, что и требовалось показать.

6. Если приближенное значеніе корня больше истиннаго, то дуга меньше тангенса, и наоборотъ: дуга больше тангенса, если приближенное значеніе x меньше истиннаго. Дѣйствительно, въ каждомъ квадрантѣ $(x - \tan x)$ положительно, до тѣхъ поръ пока значенія, придаваемыя x, ниже корня; это выраженіе сдѣлается отрицательнымъ, какъ только значенія, приписываемыя x, превзойдутъ корень.

§ 280. Вычисленіе перваго корня.—Послѣ этихъ замѣчаній приступимъ къ опредѣленію наименьшаго изъ корней, оканчивающа-

гося въ третьемъ квадрантѣ круга. Извѣстно, что $\operatorname{tang} 180^0 = 0$, $\operatorname{tang} 225^0 = 1$ и $\operatorname{tang} 270^0 = \infty$, и такъ какъ x больше π, то

$$\operatorname{arc} 225^0 > \operatorname{tang} 225^0, \quad \operatorname{arc} 270^0 < \operatorname{tang} 270^0,$$

значитъ, дуга x заключается между 225^0 и 270^0.

Ищемъ теперь линейныя значенія дугъ, заключающихся между 250^0 и 260^0, и соотвѣтственныхъ имъ тангенсовъ въ таблицѣ, помѣщенной въ концѣ книги (эти значенія часто весьма полезны); находимъ:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arc} 250^0 = 4{,}363, && \operatorname{tang} 250^0 = 2{,}747,\\
&\operatorname{arc} 252^0 = 4{,}398, && \operatorname{tang} 252^0 = 3{,}078,\\
&\operatorname{arc} 254^0 = 4{,}433, && \operatorname{tang} 254^0 = 3{,}487,\\
&\operatorname{arc} 256^0 = 4{,}468, && \operatorname{tang} 256^0 = 4{,}011,\\
&\operatorname{arc} 257^0 = 4{,}485, && \operatorname{tang} 257^0 = 4{,}331,\\
&\operatorname{arc} 258^0 = 4{,}503, && \operatorname{tang} 258^0 = 4{,}705.
\end{aligned}$$

Непосредственно видно, что искомая дуга содержится между 257^0 и 258^0, или что значеніе x, выраженное въ частяхъ радіуса, заключается между 4,485 и 4,503. Итакъ, за первое приближенное значеніе примемъ

$$x = 4{,}503.$$

Первое приближеніе по методу Ньютона.—Такъ какъ первая производная отъ разсматриваемаго уравненія:

$$F(x) = x - \operatorname{tang} x = 0$$

равна

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\operatorname{tang}^2 x,$$

то поправка будетъ слѣдующая:

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x - \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang}^2 x}.$$

Кромѣ того, мы полагаемъ $x = 4{,}503$.

Въ такомъ случаѣ пишемъ:

$$\begin{aligned}
x &= \quad 4{,}503\\
\operatorname{tang} x &= \quad 4{,}705\\
\hline
x - \operatorname{tang} x &= -0{,}202;
\end{aligned}$$

итакъ,

$$h = \frac{0,202}{(4,705)^2} = -\frac{0,202}{22,1} = 0,0091$$

и приближенное значеніе x

$$x_1 = 4,494.$$

Второе приближеніе. — Полагаемъ $x_1 = 4,494$ и вычисляемъ съ семью цифрами послѣ запятой. Чтобы выразить дугу x въ градусахъ, воспользуемся таблицею перехода, находящеюся въ таблицахъ Каллета, на стр. 214, 215 и 216.

$$\begin{array}{r}
x_1 = 4,494 \\
3,49065\ 850 = 200^0 \\
\hline
1,00334\ 150 \\
0,99483\ 767 = 57^0 \\
\hline
0,00850\ 383 \\
843\ 576 = 29' \\
\hline
0,00006\ 807 \\
6\ 787 = 14'' \\
\hline
0,00000\ 020 = 0'',04;
\end{array}$$

итакъ,

$$x_1 = 257^0 29' 14'',04.$$

Отсюда выводимъ:

$$\log \operatorname{tang} x_1 = 0,653\ 7870,$$
$$\operatorname{tang} x_1 = 4,505\ 956.$$

Слѣдовательно,

$$\operatorname{tang} x_1 - x_1 = 0,011\ 956$$

$$\log(\operatorname{tang} x_1 - x_1) = \bar{2},077\ 5859$$
$$\log \operatorname{tang}^2 x_1 = 1,307\ 5740$$
$$\log(-h_1) = \bar{4},770\ 0119,$$

откуда

$$h_1 = -0,000\ 58886,$$

что даетъ новое приближенное значеніе x,

$$x_2 = 4,493411.$$

Такъ какъ x_1 было вычислено съ точностью до тысячныхъ долей, то ошибка x_2 будетъ порядка $\frac{1}{10^6}$.

Третье приближеніе.—Мы получили съ приближеніемъ до $\frac{1}{10^6}$

$$x_2 = \text{tang}\, x_2 \quad 4{,}49341.$$

Чтобы получить еще болѣе приближенное значеніе x, мы положимъ не $x_2 = 4{,}49341$, а

$$\text{tang}\, x_2 \quad 4{,}49341,$$

что значительно облегчитъ вычисленіе. Мы уже нашли (§ 163):

$$\text{arc cotang}\, 4{,}49341 = 0{,}21897\ 94968\ 94113;$$

кромѣ того, мы имѣемъ:

$$\text{arc tang}\, x = 270^0 - \text{arc cotang}\, x;$$

но такъ какъ $270^0 = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71238\ 89803\ 84690$

и $\text{arc cotang}\, 4{,}49341 = 0{,}21897\ 94968\ 94113,$

то $x_2 = \text{arc tang}\, 4{,}49341 = 4{,}49340\ 94834\ 90577$

и $\text{tang}\, x_2 = 4{,}49341,$

откуда $\text{tang}\, x_2 - x_2 = 0{,}00000\ 05165\ 09423;$

далѣе, $\text{tang}^2 x_2 = 20{,}19073\ 34281;$

слѣдовательно,

$$h_2 = \frac{x - \text{tang}\, x}{\text{tang}^2 x} = \frac{0{,}00000\ 05165\ 0942}{20{,}19073\ 34281},$$

или

$$h_2 = -0{,}00000\ 00255\ 815\ \ldots$$

Немного выше мы нашли:

$$x_2 = 4{,}49340\ 94834\ 906,$$

а потому

$$x_3 = x_2 + h_2 = 4{,}493409\ 457909,$$

съ точностью до 12 цифръ послѣ запятой; это число, переведенное въ градусы и части градуса, даетъ:

$$x_3 = 257^0 27' 12'',231224.$$

По десятизначнымъ таблицамъ Vlacq'a находимъ:

$$\tang x_3 = 4{,}4934\ 09458,$$

что вполнѣ согласуется съ полученнымъ результатомъ.

§ 281. Общее рѣшеніе предыдущаго уравненія.—Уравненіе:

$$x - \tang x = 0 \tag{1}$$

замѣчательно не только по той быстротѣ, съ которою опредѣляются вполнѣ ясно его корни, но и по той легкости, съ какою оно поддается общему рѣшенію, сходному съ такимъ же рѣшеніемъ алгебраическихъ уравненій второй степени. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно трехъ или четырехъ послѣдовательныхъ подстановокъ, чтобы получить общее выраженіе для всѣхъ этихъ корней съ большою точностью. Мы уже вывели (§ 279), что n-ый корень меньше $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, или, что то же самое, меньше $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. Поэтому полагаемъ:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \theta;$$

здѣсь θ обозначаетъ разстояніе конца дуги x до конца квадранта, въ которомъ x оканчивается. Далѣе, мы можемъ написать:

$$\tang x = \tang\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \theta\right] = \cotang\theta,$$

откуда

$$\tang\theta = \frac{1}{\tang x};$$

по данному же уравненію

$$\tang x = x;$$

слѣдовательно,

$$\tang\theta = \frac{1}{x}$$

и

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \operatorname{arc}\tang\frac{1}{x}. \tag{2}$$

А такъ какъ $\frac{1}{x}$ меньше 1, то это послѣднее выраженіе можно развернуть въ слѣдующій рядъ:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots,$$

откуда, обозначая $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ черезъ a, получаемъ:

$$x = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots \qquad (3)$$

Изъ этого уравненія мы и выведемъ значеніе x въ функціи отъ a.

Отбросимъ сначала всѣ члены, начиная съ $\frac{1}{x}$, т.-е. напишемъ: $x = a$; подставляя это значеніе на мѣсто x во вторую часть уравненія (3) и отбрасывая 3-ьи и высшія степени, находимъ:

$$x = a - \frac{1}{a}.$$

Новая подстановка, съ отбрасываніемъ 5-ыхъ и высшихъ степеней, дастъ:

$$x = a - \frac{1}{\left(a - \frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3} =$$
$$= a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3},$$

потому что непосредственно изъ дѣленія вытекаетъ:

$$\frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \ldots$$

Подставляя это значеніе x во вторую часть уравненія (3), выполняя дѣленія и отбрасывая 7-ыя и высшія степени, получаемъ еще болѣе приближенное значеніе x:

$$x = a - \frac{1}{\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} - \frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^5} =$$
$$= a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} - \frac{5}{3a^5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^5}\right) - \frac{1}{5a^5},$$

или, послѣ приведенія подобныхъ членовъ,

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} + \frac{13}{15a^5}.$$

Наконецъ, чтобы получить новое приближеніе, замѣняемъ x этимъ послѣднимъ значеніемъ, выполняемъ дѣленія и отбрасываемъ 9-ыя и высшія степени; результатъ будетъ:

$$x = a - \frac{1}{\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5}\right)} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} - \frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a}\right)^5} + \frac{1}{7a^7},$$

или

$$x = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{5}{3a^5} + \frac{16}{3a^7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^5} + \frac{8}{a^7}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{a^5} + \frac{5}{a^7}\right) + \frac{1}{7a^7},$$

или

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7}.$$

Новое вычисленіе дало бы 6-ой членъ ряда, равный $\frac{781}{315a^9}$. Замѣняя въ этой формулѣ букву a ея значеніемъ $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ и π черезъ 3,14159 26 . . ., мы представимъ ее въ видѣ слѣдующаго уравненія:

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{(2n+1)} \times 0{,}63661\ 97723\ 67581 -$$
$$- \frac{1}{(2n+1)^3} \times 0{,}17200\ 81836 - \frac{1}{(2n+1)^5} \times 0{,}09062\ 596 -$$
$$- \frac{1}{(2n+1)^7} \times 0{,}05892\ 837 - \frac{1}{(2n+1)^9} \times 0{,}04258\ 5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

Чтобы имѣть непосредственно значеніе 1-го, 2-го, 3-го, . . . корня, стоитъ только подставить на мѣсто n соотвѣтственно числа: 1, 2, 3, . . .

По мѣрѣ увеличенія числа n число членовъ уменьшается при одной и той же степени точности и значеніе x приводится къ первому члену:

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

когда n обращается въ безконечность. Напр., чтобы получить 10-ый корень съ семью цифрами послѣ запятой, достаточно вычислить четыре первыхъ члена; найдемъ:

$$2n+1 = 21,$$

$x = 21 \times 90^0 = 32{,}986\ 72286$ . . . (См. таблицы Каллета, стр. 214)

$-0{,}030\ 81523$

$-0{,}000\ 01857$

$-0{,}000\ 00002$

или $x = 32{,}956\ 3890.$

Вычисленіе еще болѣе упростится, если коэффиціенты уравненія (4) выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, что производится весьма просто по таблицѣ перехода Каллета. Тогда получимъ:

$$x = (2n+1).90^0 - \frac{131312'',25}{(2n+1)} - \frac{35479'',24}{(2n+1)^3} -$$
$$- \frac{18693''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9} - \ldots \qquad (5)$$

Чтобы вычислить по этой формулѣ 5-ый корень нашего уравненія, когда

$$n = 5, \quad 2n+1 = 11,$$

достаточно вычислить четыре первыхъ члена и показать, что четвертый членъ вліяетъ только на дроби секундъ. Получимъ:

$$x = 11 \times 90^0 - (11937'',48 + 26'',66 + 0'',12)$$
$$= 11 \times 90^0 - 11964'',26$$

или $$x = 11 \times 90^0 - 3^0 19' 24'',26.$$

Приводимъ значенія одиннадцати первыхъ корней:

$$x_0 = \quad 90^0 - 90^0,$$
$$x_1 = \ 3 \times 90^0 - 12^0 32' 48'',$$
$$x_2 = \ 5 \times 90^0 - 7^0 22' 32'',$$
$$x_3 = \ 7 \times 90^0 - 5^0 14' 22'',$$
$$x_4 = \ 9 \times 90^0 - 4^0 3' 59'',$$
$$x_5 = 11 \times 90^0 - 3^0 19' 24'',$$
$$x_6 = 13 \times 90^0 - 2^0 48' 37'',$$
$$x_7 = 15 \times 90^0 - 2^0 26' 5'',$$
$$x_8 = 17 \times 90^0 - 2^0 8' 51'',$$
$$x_9 = 19 \times 90^0 - 1^0 55' 16'',$$
$$x_{10} = 21 \times 90^0 - 1^0 44' 17''.$$

КОНСПЕКТЪ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Въ данномъ квадрантѣ круга BCD опредѣлить дугу BM такъ, чтобы секторъ BCM былъ бы равенъ треугольнику CDR, образованному радіусомъ CD, косекансомъ CR и котангенсомъ DR.

Пусть дуга $BM = x$; составляемъ уравненіе:

$$x = \operatorname{cotang} x$$

и находимъ:

$$x = 49°17'36'',55,$$
$$x = \operatorname{cotang} x = 0,860\ 3334.$$

II. Найти секторъ BCM, равный половинѣ треугольника CBT, образованнаго радіусомъ CB, тангенсомъ BT и секансомъ CT.

Уравненіе:

$$2x = \operatorname{tang} x.$$

Рѣшеніе:

$$x = 66°46'54'',23,$$
$$2x = \operatorname{tang} x = 2,331122$$

III. Раздѣлить полукругъ $ADMB$ на двѣ равновеликія части хордою AM, проведенною изъ конца діаметра.

За неизвѣстную принимаемъ уголъ $MCD = \varphi$.

Уравненіе:

$$\varphi = \cos\varphi.$$

Рѣшеніе:

$$\varphi = 42°20'47'',25,$$
$$\varphi = \cos\varphi = 0,739\ 0851.$$

IV. Въ данномъ квадрантѣ круга BCD провести перпендикуляръ MP къ радіусу CB такъ, чтобы онъ раздѣлилъ площадь квадранта на двѣ равныя части.

Пусть дуга $BM = x$, составляемъ уравненіе:

$$2x - \frac{\pi}{2} = \sin 2x.$$

Полагая

$$2x - \frac{\pi}{2} = z,$$

преобразовываемъ это уравненіе въ слѣдующее:

$$z = \cos z.$$

Рѣшеніе такое же, какъ и для упражненія III.

V. Опредѣлить секторъ круга ACM такъ, чтобы хорда AM раздѣляла его на двѣ равновеликія части, т.-е. чтобы треугольникъ ACM былъ бы равенъ сегменту ADM.

Пусть дуга $AM = x$; составляемъ уравненіе:

$$x = 2\sin x.$$

Рѣшеніе:

$$x = 108^\circ 36' 13'',76,$$
$$x = 2\sin x = 1,895\ 4942.$$

VI. Провести изъ данной точки на окружности двѣ такія хорды, AM и AN, чтобы онѣ раздѣляли площадь круга на три равныя части.

Пусть $BCM = x$; составляемъ уравненіе:

$$x + \sin x = \frac{\pi}{3}.$$

Рѣшеніе:

$$x = 30^\circ 43' 33'',0 = 0,536267.$$

VII. Въ квадрантѣ BCD опредѣлить дугу BM такъ, чтобы она равнялась хордѣ BM, продолженной до точки F.

Уравненіе:

$$x \sin \frac{x}{2} = 1.$$

Рѣшеніе:

$$x = 84^\circ 53' 38'',83 = 1,481682$$

VIII. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{\sin^3 a - \sin^3 x}{\operatorname{cotang} x - \operatorname{cotang} a} = 0,05848868,$$

гдѣ a равно $32^\circ 19' 24'',93$.

Отв.:

$$x = 14^\circ 14' 35'',34.$$

IX. Рѣшить уравненіе:

$$10^x = 19,3229 \times x.$$

Отв.:

$$x = 1,446354.$$

X. Рѣшить уравненіе:

$$e^x = 17,64391 \times x.$$

Отв.:

$$x = 4,337745.$$

XI. Рѣшить уравненіе:

$$x^x = e^{\frac{3\pi}{2}} = 111,3177\ldots$$

Отв.:

$$x = 3,644173675.$$

Это уравненіе встрѣчается въ теоріи логариѳмическихъ спиралей и, вообще, въ теоріи кривыхъ, совпадающихъ всѣми точками со своими развертками.

XII. Рѣшить уравненіе:

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0.$$

Отв.:

$$x = 4{,}7300\ 4099.$$

Это уравненіе встрѣчается въ теоріи цѣпной линіи.

XIII. Рѣшить уравненіе:

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0.$$

Отв.:

$$x = 1{,}8751\ 0402.$$

XIV. Рѣшить уравненіе:

$$\operatorname{tang} x = \frac{x}{1 - \frac{3x^2}{4}}.$$

Отв.:

$$x_1 = 2{,}563\ 4342,$$
$$x_2 = 6{,}058\ 6701.$$

Три послѣднихъ уравненія встрѣчаются въ теоріи упругихъ тѣлъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Рѣшеніе нѣкоторыхъ важныхъ вопросовъ

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Разложеніе раціональныхъ дробей.

§ 282. Цѣль этой главы.—Если оба члена дроби суть цѣлые многочлены относительно одной и той же буквы x, то мы всегда съумѣемъ, дѣля числитель этой дроби на ея знаменатель до тѣхъ поръ, пока возможно, представить ее въ видѣ суммы цѣлаго многочлена относительно той же самой буквы и дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Цѣль настоящей главы—показать, какъ эта новая дробь сама можетъ быть разложена на другія дроби, болѣе простыя. При этомъ мы предположимъ, что у насъ рѣшено уравненіе, получаемое черезъ приравниваніе знаменателя нулю, и что намъ извѣстны всѣ его корни. Сверхъ того, предположимъ, что оба члена дроби не имѣютъ ни одного общаго множителя.

I. Случай неравныхъ корней.

§ 283. Видъ дроби въ этомъ случаѣ.—Пусть

$$\frac{f(x)}{F(x)} \qquad (1)$$

будетъ раціональная дробь, гдѣ $f(x)$ обозначаетъ многочленъ отно-

сительно x, степени низшей, чѣмъ $F(x)$, и пусть $a, b, c, \ldots, k$ будутъ корнями уравненія.

$$F(x)=0.$$

Предположимъ сначала, что нѣтъ между ними равныхъ. Въ такомъ случаѣ не трудно показать, что дробь (1) всегда можно представить въ видѣ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-k}+\frac{L}{x-l}, \qquad (2)$$

гдѣ $A, B, C, \ldots, K, L$ постоянныя величины. Для этого разсмотримъ $A, B, C, \ldots, K, L$, какъ неопредѣленные коэффиціенты, и отыщемъ ихъ значеніе; далѣе, докажемъ, что они, дѣйствительно, обращаютъ уравненіе (2) въ тождество.

Уравненіе (2) по умноженіи обѣихъ его частей на $F(x)$ приметъ видъ:

$$f(x)=\frac{AF(x)}{x-a}+\frac{BF(x)}{x-b}+\ldots+\frac{KF(x)}{x-k}+\frac{LF(x)}{x-l}. \qquad (3)$$

Такъ какъ равенство (3) должно быть тождествомъ, то необходимо, чтобы оно удовлетворялось при значеніяхъ $x=a, x=b, \ldots, x=l$. Полагаемъ, напр., $x=a$ и замѣчаемъ, что $F(a)$ равна нулю и, слѣдовательно, всѣ члены во второй части пропадаютъ, за исключеніемъ одного, который сокращается на $(x-a)$; тогда

$$f(a)=A\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a,$$

гдѣ $\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a$ есть значеніе частнаго $\frac{F(x)}{x-a}$ при $x=a$. Зная же, что $F(a)=0$, мы изъ формулы:

$$F(x)=F[a+(x-a)]=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{F''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\ldots$$
$$+\frac{F^{m}(a)}{1\cdot 2\ldots m}(x-a)^m$$

выводимъ, что

$$\frac{F(x)}{x-a}=F'(a)+\frac{F''(a)}{1\cdot 2}(x-a)+\ldots+\frac{F^{m}(a)}{1\cdot 2\ldots m}(x-a)^{m-1};$$

въ этомъ равенствѣ при $x=a$ всѣ члены во второй части, кромѣ перваго, исчезнутъ, такъ что

$$\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a = F'(a)$$

и уравненіе (3) перейдетъ въ слѣдующее:

$$f(a) = AF'(a),$$

откуда

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}\,. \tag{4}$$

Это значеніе A не равно нулю; въ самомъ дѣлѣ, $f(a)=0$ не имѣетъ общихъ корней съ $F(x)=0$ и, поэтому, $f(a)$ не обращается въ нуль. Оно также не обращается въ безконечность, потому что $F(x)=0$ не имѣетъ равныхъ корней. Такимъ же образомъ найдемъ:

$$B = \frac{f(b)}{F'(b)},\ C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots,\ L = \frac{f(l)}{F'(l)}\,.$$

Для опредѣленія предыдущихъ значеній мы допустили возможность разложенія (2) и возможность существованія уравненія (3), вытекающаго изъ этого разложенія. Слѣдовательно, необходимо доказать, что эти, очевидно, единственно возможныя значенія дѣйствительно удовлетворяютъ требуемымъ условіямъ. Для этого разсуждаемъ такъ: $a, b, \ldots, k, l$ будутъ корнями уравненія (3) при найденныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ, но такъ какъ, по предположенію, степень функціи $f(x)$ ниже степени $F(x)$, иначе говоря, ея степень не выше $(m-1)$, то такая функція m корней можетъ имѣть только въ томъ случаѣ, если удовлетворяется тождественно; итакъ, найденныя значенія обращаютъ уравненіе (3), а вмѣстѣ съ нимъ и разложеніе (2), въ тождество.

§ 284. Случай неравныхъ мнимыхъ корней.—По предыдущему, обозначая черезъ $f(x)$ многочленъ низшей степени, чѣмъ $F(x)$, и черезъ $a, b, c, \ldots, k, l$ всѣ m корней $F(x)=0$, пишемъ тождество:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{F'(a)(x-a)} + \frac{f(b)}{F'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{f(l)}{F'(l)(x-l)}\,. \tag{1}$$

Чтобы эта формула имѣла мѣсто, мы должны предположить, что корни: $a, b, \ldots, k, l$ неравны. Она прилагается къ случаю, гдѣ

нѣкоторые изъ нихъ—мнимые; при этомъ вторую часть придется подвергнуть нѣкоторымъ преобразованіямъ съ цѣлію уничтожить мнимыя количества, входящія туда явнымъ образомъ. Пусть $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ и $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ будутъ два мнимыхъ корня; не трудно замѣтить, что $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ и $f(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ различаются между собою только знакомъ при $\sqrt{-1}$, такъ что если одно изъ этихъ выраженій есть $P+Q\sqrt{-1}$, то другое непремѣнно будетъ $P-Q\sqrt{-1}$. Также $F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ и $F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ могутъ быть представлены чрезъ $M+N\sqrt{-1}$ и $M-N\sqrt{-1}$. Отсюда слѣдуетъ, что сумма двухъ членовъ второй части (1), соотвѣтствующихъ разсмотрѣннымъ корнямъ, будетъ вида:

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{(M+N\sqrt{-1})(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})}+\frac{P-Q\sqrt{-1}}{(M-N\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})},$$

или, послѣ приведенія къ одному знаменателю,

$$\frac{2(PM+QN)(x-\alpha)+2PN\beta-2QM\beta}{(M^2+N^2)[(x-\alpha)^2+\beta^2]}.$$

Итакъ, обѣ простыя дроби, соотвѣтствующія двумъ сопряженнымъ корнямъ, могутъ быть соединены въ одну, у которой числитель первой степени, а знаменатель —второй относительно x.

II. Случай равныхъ корней.

§ 285. Видъ дроби въ этомъ случаѣ.—Если знаменатель дроби

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

имѣетъ равные корни, то предыдущія формулы не приложимы; тѣмъ не менѣе, такую дробь можно разложить на простѣйшія. Чтобы показать это, мы изложимъ сначала слѣдующую теорему.

Теорема.— *Если a обозначаетъ многократный корень уравненія: $F(x)=0$ и α—степень его кратности, то раціональная дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ всегда можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ.*

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)},$$

гдѣ A—постоянная, $f_1(x)$—цѣлый и раціональный многочленъ и $F_1(x)$—частное отъ дѣленія $F(x)$ на $(x-a)^\alpha$.

Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было A, мы можемъ написать тождество:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f(x)-AF_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}.$$

Далѣе, если мы опредѣлимъ A изъ условія:

$$f(a)-AF_1(a)=0, \tag{*}$$

то числитель второго члена во второй части обратится въ нуль при $x=a$ и, слѣдовательно, будетъ дѣлиться на $(x-a)$; полагая, поэтому,

$$\frac{f(x)-AF_1(x)}{x-a}=f_1(x),$$

получимъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)},$$

что и требовалось доказать.

Замѣчаніе.—Такъ какъ $F_1(x)$ есть частное отъ дѣленія $F(x)$ на самую высшую степень $(x-a)$, какая только можетъ его раздѣлить, то $F_1(a)$ ни въ какомъ случаѣ не обратится въ нуль; поэтому, уравненіе (*) дастъ всегда для A конечную величину. Можно еще замѣтить, что это значеніе никогда не будетъ нулемъ; дѣйствительно, послѣ приведенія дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ къ ея простѣйшему виду $f(x)$ и $F(x)$ не могутъ имѣть общаго корня и, слѣдовательно, числитель A, равный $f(a)$, не можетъ стать нулемъ.

Представивъ дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ подъ видомъ:

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)}, \tag{1}$$

прилагаемъ тотъ же методъ ко второму члену послѣдняго выраженія, т.-е. выражаемъ его посредствомъ суммы:

$$\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)}, \tag{2}$$

гдѣ A_1—постоянная, которая, на этотъ разъ, можетъ быть нулемъ, и $f_2(x)$—цѣлая функція.

Также можно разложить $\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)}$ на сумму вида:

$$\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}F_1(x)}. \tag{3}$$

Продолжая такимъ же образомъ и далѣе, увидимъ, что предложенная дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}, \tag{4}$$

гдѣ A, $A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ конечныя и опредѣленныя постоянныя, причемъ первая изъ нихъ не нуль.

Прибавимъ, что такъ какъ степень $f(x)$ предполагается ниже степени $F(x)$, то степень $f_\alpha(x)$ ниже степени $F_1(x)$; дѣйствительно, умножая формулу (4) на $F(x)$, пишемъ тождество:

$$f(x)=AF_1(x)+A_1(x-a)F_1(x)+\ldots+$$
$$+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)+(x-a)^{\alpha}f_\alpha(x), \tag{5}$$

въ которомъ степень члена $(x-a)^{\alpha}f_\alpha(x)$ не должна быть выше $(m-1)$, потому что $f(x)$ степени не выше $(m-1)$, а изъ этого слѣдуетъ, что $f_\alpha(x)$ не выше степени $(m-\alpha-1)$, между тѣмъ какъ степень $F_1(x)$ есть $(m-\alpha)$. Кромѣ того, нѣтъ ни одного общаго множителя для $f_\alpha(x)$ и $F_1(x)$, такъ какъ въ противномъ случаѣ такой множитель, дѣля $f_\alpha(x)$ и $F_1(x)$, раздѣлилъ бы, въ силу формулы (5), и $f(x)$, т.-е. былъ бы общимъ множителемъ для $f(x)$ и $F(x)$. Отсюда вытекаетъ, что для дроби $\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$ существуютъ тѣ же условія, что и для $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Пусть, теперь, b будетъ вторымъ корнемъ $F(x)=0$ и β — степень его кратности, т.-е. пусть

$$F_1(x)=(x-b)^{\beta}F_2(x);$$

въ такомъ случаѣ мы можемъ приложить предыдущій методъ къ дроби $\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$ и получимъ выраженіе вида:

$$\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}=\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{f_\beta(x)}{F_2(x)},$$

гдѣ $B, B_1, \ldots, B_{\beta-1}$ —опредѣленныя постоянныя, при чемъ первая изъ нихъ не нуль, и $f_\beta(x)$—цѣлая функція низшей степени, чѣмъ $F_2(x)$, не имѣющая ни одного общаго множителя съ $F_2(x)$.

Вообще изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-c)^\gamma,$$

то дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\ + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{C}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_{\gamma-1}}{x-c};\end{aligned}$$

при этомъ $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots, C, C_1, \ldots$ обозначаютъ постоянныя, изъ которыхъ $A, B, \ldots, C$ не нули.

Изложенный методъ, доказывая возможность этого разложенія, въ то же время даетъ способъ для его выполненія.

§ 286. Разложеніе можетъ быть только единственнымъ.—Теперь мы докажемъ, что раціональная дробь можетъ быть разложена только на одинъ рядъ простѣйшихъ дробей вида, указаннаго въ предыдущемъ параграфѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы нашли два разложенія одной и той же раціональной дроби:

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + E(x),$$

$$\frac{A'}{(x-a')^{\alpha'}} + \frac{A_1'}{(x-a')^{\alpha'-1}} + \ldots + \frac{A'_{\alpha'-1}}{x-a'} + \frac{B'}{(x-b')^{\beta'}} + \ldots + E'(x);$$

они равны между собою, каково бы ни было x. Умножаемъ ихъ на $(x-a)^\alpha$ и затѣмъ полагаемъ $x=a$; первое разложеніе приведется къ A, второе же обратится въ нуль, если ни одинъ изъ его знаменателей не содержитъ множителемъ $(x-a)$; поэтому, необходимо, чтобы степени $(x-a)$ были бы знаменателями нѣкоторыхъ дробей этого разложенія. Пусть, напр., $a'=a$; тогда $\alpha'=\alpha$ и $A'=A$.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что одинъ изъ двухъ показате-

лей, напр. α, больше другого; изъ уравненія, выражающаго равенство двухъ разложеній, выводимъ значеніе $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ и приводимъ всѣ остальные члены къ одному знаменателю; получится результатъ вида:

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

или

$$A=(x-a)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

гдѣ φ и ψ обозначаютъ многочлены, изъ которыхъ второй не дѣлится на $(x-a)$. А такъ какъ A—постоянная величина, то она должна равняться нулю; дѣйствительно, предыдущее равенство даетъ $A=0$ при $x=a$. Итакъ, $\alpha=\alpha'$.

Докажемъ теперь, что $A=A'$. Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая разложенія одно другому и перенося членъ $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ въ первую часть, примѣняемъ предыдущее разсужденіе и выводимъ, что $(A-A')$ должно быть равно нулю.

По доказанному наивысшія степени $(x-a)$ въ обоихъ разложеніяхъ равны между собою; опуская ихъ, получаемъ равные остатки. Слѣдовательно, необходимо, чтобы въ этихъ остаткахъ члены съ наивысшими степенями $(x-a)$ были также равны между собою. Продолжая такимъ же образомъ и далѣе, докажемъ, что простыя дроби, а потомъ и цѣлыя части, $E(x)$ и $E'(x)$, образующія наши разложенія, равны соотвѣтственно другъ другу.

§ 287. Методъ для вычисленія коэффиціентовъ.—Для разложенія раціональной дроби можно воспользоваться болѣе простымъ пріемомъ, чѣмъ тотъ, который вытекаетъ изъ вышеизложеннаго метода (**§ 285**).

Пусть $\frac{f(x)}{F(x)}$ есть данная дробь, а $(x-a)^n$—многократный множитель ея знаменателя, т.-е. пусть

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)}.$$

Чтобы найти заразъ, посредствомъ только одного дѣйствія, простыя дроби, знаменатели которыхъ суть различныя степени $(x-a)$, положимъ

$$x-a=h,$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)}=\frac{f(a+h)}{h^n F_1(a+h)}.$$

Располагая затѣмъ многочлены: $f(a+h)$ и $F_1(a+h)$ по *возрастающимъ* степенямъ h, получимъ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_mh^m}{(B+B_1h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p)h^n}.$$

Если, теперь, выполнить дѣленіе числителя на первый множитель знаменателя, располагая частное по возрастающимъ степенямъ h, то степени послѣдовательныхъ остатковъ все время будутъ возрастать. Изъ этого слѣдуетъ, что первый членъ одного изъ остатковъ станетъ, наконецъ, равнымъ или выше n. На этомъ остаткѣ прекратимъ дѣйствіе; частное будетъ $(n-1)$-ой степени. Итакъ,

$$\frac{A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_mh^m}{B+B_1h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p}=$$
$$=C+C_1h+C_2h^2+\ldots+C_{n-1}h^{n-1}+\frac{\varphi(h)}{B+B_1h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p};$$

замѣчая же, что всѣ члены $\varphi(h)$ содержатъ h въ степени, по крайней мѣрѣ, равной n и полагая

$$\frac{\varphi(h)}{h^n}=\varphi_1(h),$$

дѣлимъ обѣ части послѣдняго равенства на h^n.

$$\frac{A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_mh^m}{h^n(B+B_1h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p)}=$$
$$=\frac{C}{h^n}+\frac{C_1}{h^{n-1}}+\frac{C_2}{h^{n-2}}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{h}+\frac{\varphi_1(h)}{B+B_1h+B_2h^2+\ldots+B_ph^p}.$$

Если замѣнять h его значеніемъ $(x-a)$, то первая часть этого уравненія обратится точно въ данную дробь; вторая же будетъ состоять изъ суммы простыхъ дробей:

$$\frac{C}{(x-a)^n}+\frac{C_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{C_{n-1}}{x-a},$$

знаменатели которыхъ суть степени $(x-a)$, и такой раціональной дроби, знаменатель которой не содержитъ болѣе множителемъ $(x-a)$. Съ этою послѣднею поступаютъ такъ же, какъ и съ данною, чтобы получить простыя дроби, соотвѣтствующія другимъ корнямъ, что и дополнитъ наше разложеніе.

§ 288. Случай равныхъ мнимыхъ корней.—Только-что изложенный методъ никоимъ образомъ не исключаетъ случая многократныхъ мнимыхъ корней. Должно лишь замѣтить, что при существованіи такихъ корней можно въ конечномъ результатѣ соединять члены по два для уничтоженія мнимыхъ величинъ; впрочемъ, гораздо проще въ этомъ случаѣ придать разложенію другой видъ, возможность котораго вытекаетъ изъ слѣдующей теоремы.

Теорема. — *Если знаменатель раціональной дроби* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *имѣетъ n-кратный мнимый корень* $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, *а слѣдовательно, и сопряженный съ нимъ n-кратный* $(\alpha-\beta\sqrt{-1})$, *такъ что*

$$F(x)=(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^nF_1(x)=$$
$$=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^nF_1(x),$$

то можно всегда положить

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}, \tag{1}$$

гдѣ P и Q—постоянныя, а $f_1(x)$ *вещественный многочленъ*

Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были P и Q, всегда существуетъ тождество:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^nF_1(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^nF_1(x)}; \tag{2}$$

съ другой же стороны, очевидно, что P и Q можно такъ выбрать, что числитель второго члена во второй части обратится въ нуль при

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x=\alpha-\beta\sqrt{-1}$$

и, слѣдовательно, раздѣлится на $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Дѣйствительно, если представить $f(x)$ и $F_1(x)$ при этихъ значеніяхъ x въ видѣ:

$$f(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})=M\pm N\sqrt{-1},$$
$$F_1(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})=M'\pm N'\sqrt{-1},$$

то поставленное условіе выразится такъ:

$$(M\pm N\sqrt{-1})-[P(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+Q](M'\pm N'\sqrt{-1})=0;$$

далѣе, приравнивая нулю отдѣльно коэффиціентъ при $\sqrt{-1}$ и отдѣльно вещественную часть, получимъ два уравненія, изъ которыхъ и найдутся вещественныя значенія для P и Q.

Такъ какъ числитель: $f(x)-(Px+Q)F_1(x)$ дѣлится на $(x-\alpha)^2+\beta^2$, то уравненіе (2) перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}, \qquad (3)$$

гдѣ $f_1(x)=\frac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. Примѣняя тотъ же пріемъ къ разложенію послѣдней дроби равенства (3), находимъ:

$$\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}=\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\frac{f_2(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2}F_1(x)}.$$

Продолжая такимъ же образомъ и далѣе, увидимъ, что дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ можетъ быть разложена слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\cdots$$
$$+\frac{P_{n-1}x+Q_n}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_n(x)}{F_1(x)},$$

гдѣ $f_n(x)$ — низшей степени, чѣмъ функція $F_1(x)$, и не имѣетъ съ послѣднею ни одного общаго множителя.

Эта формула вмѣстѣ съ выведенною въ § **285**-мъ составляютъ теорему:

§ 289. Теорема.—*Если многочленъ $F(x)$ разлагается на вещественныхъ множителей первой и второй степени, такъ что*

$$F(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ \ldots\ (x^2+px+q)^n\ldots(x^2+rx+s)^m,$$

то раціональную дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ можно разложить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=E(x)+\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+$$
$$+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+$$
$$+\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^m}+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{m-1}}+\cdots+\frac{R_{m-1}x+S_{m-1}}{x^2+rx+s},$$

при чемъ $E(x)$ обозначаетъ цѣлую часть, которая можетъ быть и нулемъ, а A, $A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$, B, B_1, $B_{\beta-1}$, P, $Q, \ldots, R_{m-1}$, S_{m-1} постоянныя величины.

Пріемъ, который послужилъ намъ для доказательства возможности разложенія, даетъ также средство для его выполненія; дѣйствительно, его можно приложить и къ составленію членовъ, соотвѣтствующихъ множителямъ второй степени: $x^2+px+q, \ldots, x^2+rx+s$.

И здѣсь можно было бы доказать (см. § 286), что разложеніе этого вида можетъ быть только единственнымъ и вывести способъ нахожденія дробей, соотвѣтствующихъ данному корню, по методу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ (см. § 287), но мы опустимъ эти подробности, какъ не представляющія ни затрудненія, ни интереса.

КОНСПЕКТЪ.

§ 282. Цѣль этой главы. **§ 283.** Случай, когда знаменатель разлагаемой дроби не имѣетъ равныхъ корней.—**§ 284.** Преобразованіе разложенія въ томъ случаѣ, когда есть мнимые корни.—**§ 285.** Случай равныхъ корней.—**§ 286.** Разложеніе предыдущаго вида можетъ быть только единственнымъ.—**§ 287.** Методъ для вычисленія коэффиціентовъ.—**§ 288.** Случай равныхъ мнимыхъ корней.—**§ 289.** Теорема въ общемъ видѣ, вытекающая изъ теоріи, изложенной въ этой главѣ.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Если $\varphi(x)=0$ есть уравненіе степени n, а a, b, $c, \ldots k$, l его корни, то при всякомъ значеніи p, меньшемъ $(n-1)$

$$0=\frac{a^p}{\varphi'(a)}+\frac{b^p}{\varphi'(b)}+\ldots+\frac{l^p}{\varphi'(l)}.$$

Основываются на разложеніи, въ простыхъ дробяхъ, дроби $\frac{x^{p+1}}{\varphi(x)}$.

II. $$\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)}=\frac{\frac{12}{7}}{2x-3}-\frac{\frac{52}{7}}{5x-4}.$$

III. $$\frac{x}{x^2+11x+30}=\frac{6}{x+6}-\frac{5}{x+5}.$$

IV. $$\frac{x}{a^3-x^3}=\frac{1}{3a(a-x)}+\frac{x-a}{3a(x^2+ax+a^2)}.$$

V. $$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}.$$

VI. $$\frac{4+3x}{x(x-1)(x^2+1)}=-\frac{4}{x}+\frac{7}{2(x-1)}+\frac{x-7}{2(x^2+1)}.$$

VII. $$\frac{3+x}{(5-x)^2}=\frac{8}{(5-x)^2}-\frac{1}{5-x}.$$

VIII. $$\frac{5+6x-2x^2}{(3+2x)^3}=-\frac{17}{2(3+2x)^3}+\frac{6}{(3+2x)^2}-\frac{1}{2(3+2x)}.$$

IX. $$\frac{2+3x}{(4-x)^3}=\frac{14}{(4-x)^3}-\frac{3}{(4-x)^2}.$$

X. $$\frac{1+x+x^2+3x^3}{(1-x+5x^2)^2}=\frac{1}{25}\cdot\frac{17+18x}{(1-x+5x^2)^2}+\frac{1}{25}\cdot\frac{8+15x}{1-x+5x^2}.$$

XI. $$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}+x}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\frac{\sqrt{2}-x}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right\}.$$

XII. $$\frac{70+114x+143x^2+107x^3+46x^4+8x^5}{(7+x)(1+x)^5}=$$
$$=\frac{7}{7+x}+\frac{5}{(1+x)^5}+\frac{3}{(1+x)^4}+\frac{1}{1+x}.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Мнимыя выраженія.

I. Исчисленіе мнимыхъ выраженій.

§ 290. Цѣль введенія мнимыхъ выраженій въ исчисленіе.—Рѣшеніе уравненій второй степени приводитъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, къ выраженіямъ, не имѣющимъ никакого численнаго значенія; они указываютъ на тѣ дѣйствія, которыя невозможно выполнить. Эти *мнимыя* выраженія вводятъ для обобщенія. Мы, напр., видѣли, что, вводя ихъ, мы могли высказать, безъ ограниченія, слѣдующія теоремы:

1. Всякое уравненіе второй степени имѣетъ два корня.

2. Во всякомъ уравненіи второй степени, вида $x^2+px+q=0$, сумма корней равна коэффиціенту при второмъ членѣ, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе ихъ равно извѣстному члену.

Эти преимущества введенія мнимыхъ выраженій, незначительныя въ только-что приведенномъ примѣрѣ, являются весьма важными въ общей теоріи уравненій.

Мнимыя выраженія также могутъ быть вводимы съ пользою при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ, что мы и покажемъ въ этой главѣ.

§ 291. Опредѣленія и соглашенія.—Мнимымъ выраженіемъ называютъ выраженіе вида $a + \sqrt{-K}$, гдѣ $-K$ обозначаетъ отрицательное число. Такъ какъ $\sqrt{-K}$ ни для какой величины не можетъ служить мѣрою, то въ этомъ смыслѣ оно не есть число; несмотря на это, оно можетъ быть вводимо въ вычисленія съ пользою, подъ условіемъ, чтобы *его квадратъ былъ бы всегда замѣняемъ черезъ* $-K$. Кромѣ того, дѣйствія съ мнимыми числами будутъ достаточно опредѣлены, если согласиться прилагать къ нимъ всѣ правила, доказанныя, вообще, для вещественныхъ чиселъ; результаты, какъ мы увидимъ, всегда будутъ того же вида, что и мнимыя числа, введенныя въ вычисленіе.

§ 292. Обычный видъ мнимаго выраженія.—Подкоренное число $-K$, будучи отрицательнымъ, можетъ быть представлено посредствомъ $-b^2$, т.-е. посредствомъ квадрата со знакомъ $-$, и обычный видъ мнимаго выраженія будетъ $a + \sqrt{-b^2}$, что чаще пишется такъ:

$$a + b\sqrt{-1}.$$

Замѣчаніе.—Вмѣсто $\sqrt{-b^2}$ пишутъ $b\sqrt{-1}$ въ силу принятаго выше соглашенія: *примѣнять къ мнимымъ числамъ всѣ правила, доказанныя, вообще, для вещественныхъ чиселъ*. Въ самомъ дѣлѣ, $-b^2$ можетъ быть разсматриваемо, какъ произведеніе: $b^2 \times (-1)$; по правилу же, доказанному, вообще, для вещественныхъ чиселъ, можно множитель b^2 вынести за знакъ радикала.

§ 293. Мнимыя сопряженныя выраженія.—Каковы бы ни были вещественныя числа a и b, мнимое выраженіе $a + b\sqrt{-1}$ есть корень уравненія второй степени:

$$(x - a)^2 + b^2 = 0.$$

Не трудно замѣтить, что второй корень этого уравненія есть $a - b\sqrt{-1}$.

Оба корня: $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$ называются *мнимыми со-*

пряженными выраженіями; сумма ихъ вещественна и равна $2a$, а произведеніе равно a^2+b^2.

§ 294. Степени $\sqrt{-1}$.—При дѣйствіяхъ надъ выраженіями вида: $a+b\sqrt{-1}$ къ нимъ примѣняютъ (**§ 291**) всѣ правила алгебраическаго исчисленія, поступая съ $\sqrt{-1}$, какъ съ числомъ. Иногда этотъ символъ обозначается буквою i и въ получаемыхъ результатахъ i^2 замѣняется -1; это вполнѣ опредѣляетъ послѣдовательныя степени i, или $\sqrt{-1}$; дѣйствительно,

$$(\sqrt{-1})^3=i^3=i^2\times i=-i=-\sqrt{-1}\,,$$
$$(\sqrt{-1})^4=i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$$
$$(\sqrt{-1})^5=i^5=i^4\times i=i=\sqrt{-1}\,,$$

и т. д. Вообще, обозначая черезъ n, какое-угодно цѣлое число, можемъ написать:

$$(\sqrt{-1})^{4n}\ \ =(i^4)^n=1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1}=i^{4n}\times i=i=\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=i^{4n}\times i^2=i^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3}=i^{4n}\times i^3=i^3=-\sqrt{-1}.$$

Всѣ эти соглашенія необходимы, если мы желаемъ примѣнять къ вычисленіямъ съ мнимыми выраженіями общія правила относительно вещественныхъ чиселъ. Они даютъ возможность доказать слѣдующую, весьма важную, теорему.

§ 295. Произведеніе мнимыхъ выраженій.—Теорема. *Произведеніе какого-угодно числа мнимыхъ выраженій:*

$$a_1+b_1\sqrt{-1},\ a_2+b_2\sqrt{-1},\ a_3+b_3\sqrt{-1},\ \ldots,\ a_n+b_n\sqrt{-1},$$

получаемое по правиламъ алгебраическаго умноженія, при чемъ степени $\sqrt{-1}$ *замѣняются указанными выше значеніями, останется тождественно однимъ и тѣмъ же, въ какомъ бы порядкѣ ни были произведены дѣйствія, т.-е получатся одни и тѣ же: какъ вещественная часть, такъ и вещественный коэффиціентъ при* $\sqrt{-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя $\sqrt{-1}$ черезъ i, мы знаемъ, что результатъ будетъ тождественно одинъ и тотъ же, въ какомъ бы

порядкѣ ни произвести послѣдовательныя умноженія, и что коэффиціенты при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ i во всѣхъ случаяхъ будутъ имѣть одни и тѣ же значенія. Поэтому, если въ тождественныхъ многочленахъ замѣнить степени i указанными выше значеніями, т.-е. i^{4n} замѣнить черезъ 1, i^{4n+1}—черезъ $\sqrt{-1}$, i^{4n+2}—черезъ—1, i^{4n+3}—черезъ—$\sqrt{-1}$, то результаты получатся одинаковые; съ другой же стороны, совершенно безразлично: замѣнить ли въ концѣ вычисленія каждую степень i ея значеніемъ, или же производить подстановки постепенно, послѣ каждаго частнаго дѣйствія, потому что всѣ эти подстановки сводятся къ замѣнѣ произведенія двухъ равныхъ множителей, изъ которыхъ каждый есть i, множителемъ —1; а вводить ли этотъ послѣдній однажды или последовательно—все равно.

§ 296. Приложеніе.—Мы дадимъ непосредственное приложеніе предыдущей теоремы. Разсмотримъ произведеніе:

$$P=(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1}).$$

Перемножая два первыхъ множителя, находимъ:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1};$$

перемножая два послѣднихъ, находимъ:

$$(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1};$$

слѣдовательно,

$$P=[(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}][(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1}]=$$
$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Съ другой стороны, умножая первый множитель на третій, а второй—на четвертый, получаемъ:

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2,$$
$$(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=c^2+d^2;$$
$$P=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Итакъ,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Эту формулу, впрочемъ, очень легко повѣрить.

II. Введеніе тригонометрическихъ линій въ мнимыя выраженія.

§ 297. Новый видъ мнимаго выраженія.—Мнимыя выраженія могутъ быть представлены подъ особымъ видомъ, благодаря которому дѣйствія надъ ними весьма часто упрощаются.

Пусть будетъ дано выраженіе:

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Полагая

(1) $$a=\rho\cos\varphi,\qquad b=\rho\sin\varphi,$$ (2)

мы можемъ, каковы бы ни были a и b, найти для ρ нѣкоторое положительное значеніе, а для φ—значеніе, меньшее 2π, которыя удовлетворили бы этимъ двумъ уравненіямъ; для этого достаточно взять:

(3) $$\rho^2=a^2+b^2,\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{b}{a}.$$ (4)

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (3) и (4) выводятся изъ уравненій (1) и (2), если эти послѣднія возвести въ квадратъ и сложить для полученія уравненія (3), и по-членно раздѣлить одно на другое для полученія уравненія (4).

Обратно, если ρ и φ заданы уравненіями: (3) и (4), то

$$\cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}}=\frac{\frac{b}{a}}{\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$$

или, по замѣнѣ $\sqrt{a^2+b^2}$ черезъ ρ,

$$\cos\varphi=\frac{a}{\pm\rho},\ \sin\varphi=\frac{b}{\pm\rho},$$

т.-е.

$$a=\pm\rho\cos\varphi,\ b=\pm\rho\sin\varphi,$$

а это есть не что иное, какъ уравненія (1) и (2), если для φ выбрать

тотъ изъ двухъ угловъ, который при тангенсѣ $\frac{b}{a}$ имѣетъ синусъ того же знака, что и ρ.

Итакъ, мнимое выраженіе $a+b\sqrt{-1}$ всегда можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

при чемъ ρ и φ, очевидно, могутъ быть только единственныя (ρ должно быть положительнымъ, а φ меньше 2π); ρ называется *модулемъ*, а φ *аргументомъ* этого мнимаго выраженія. Сейчасъ мы убѣдимся, сколько вносится простоты этимъ видомъ мнимыхъ выраженій.

§ 298. Умноженіе мнимыхъ выраженій.—Пусть дано перемножить два выраженія:

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi), \qquad \rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi').$$

Выполняя произведеніе и замѣняя крадратъ $\sqrt{-1}$ черезъ -1, получаемъ:

$$\rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi'+\sqrt{-1}(\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\cos\varphi')]=$$
$$=\rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi')]$$

Слѣдовательно, *чтобы перемножить два мнимыхъ выраженія, нужно перемножить ихъ модули и сложить аргументы.*

По этому правилу, очевидно, можно получить произведеніе сколькихъ-угодно мнимыхъ выраженій.

§ 299. Дѣленіе мнимыхъ выраженій.—*Чтобы раздѣлить одно мнимое выраженіе на другое, достаточно раздѣлить модули и взять разность аргументовъ.* Получимъ:

$$\frac{\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}{\rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi')}=\frac{\rho}{\rho'}[\cos(\varphi-\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi')].$$

Въ самомъ дѣлѣ, это равенство станетъ очевиднымъ, если освободиться отъ знаменателя и выполнить умноженіе во второй части по предыдущему правилу.

§ 300 Степени мнимаго выраженія. Случай, когда m — цѣлое и положительное.—Возвести мнимое выраженіе въ цѣлую и положи-

тельную степень значитъ перемножить между собою нѣсколько равныхъ мнимыхъ выраженій, а это сводится къ предыдущимъ теоремамъ.

Итакъ, *модуль цѣлой степени мнимаго выраженія равенъ соотвѣтственной степени даннаго модуля, а аргументъ произведенію даннаго аргумента на показателя степени.* Такимъ образомъ

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^m=\rho^m(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi). \qquad (1)$$

Эта формула дана *Моавромъ* и весьма важна въ анализѣ; она распространяется, какъ мы сейчасъ увидимъ, на m дробное и m отрицательное.

§ 301. Случай, когда m—дробное.—Предположимъ сначала, что m имѣетъ видъ $\frac{1}{m'}$, гдѣ m'—цѣлое; требуется показать, что

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi]^{\frac{1}{m'}}=\rho^{\frac{1}{m'}}\left(\cos\frac{\varphi}{m'}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m'}\right). \qquad (2)$$

Чтобы повѣрить это равенство, возвышаемъ обѣ его части въ степень m': первая дастъ, очевидно, въ результатѣ $\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$, а по правилу, выведенному выше для цѣлыхъ степеней, въ то же самое обратится и вторая часть.

Замѣчаніе.—Хотя $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ даны, но $\cos\frac{\varphi}{m}$ и $\sin\frac{\varphi}{m}$ будутъ не вполнѣ опредѣлены; они могутъ принять нѣсколько различныхъ значеній. Поэтому, и для выраженія:

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{1}{m'}}$$

получатся различныя значенія, что согласно съ принципами, изложенными въ теоріи уравненій.

Разсмотримъ теперь случай, когда показатель имѣетъ видъ дроби $\frac{m}{n}$, т.-е. покажемъ, что

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{m\varphi}{n}\right). \qquad (3)$$

Въ самомъ дѣлѣ, возвысить какое-нибудь выраженіе въ степень $\frac{m}{n}$ значитъ, по опредѣленію, извлечь изъ него корень n-ой степени и

полученный результатъ возвести въ m-ую степень. По формуламъ же (1) и (2) мы можемъ выполнить оба дѣйствія въ послѣдовательномъ порядкѣ, что и приведетъ насъ къ формулѣ (3).

§ 302. Случай, когда m — отрицательное. — Предположимъ, наконецъ, что m имѣетъ отрицательное значеніе $-m'$; требуется показать, что

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{-m'}=\rho^{-m'}[\cos(-m'\varphi)+\sqrt{-1}\sin(-m'\varphi)].$$

Для этого замѣчаемъ, что, по опредѣленію,

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{-m'}=\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{m'}},$$

но такъ какъ m' положительно, то (§ 300)

$$\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{m'}}=\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)},$$

далѣе же,

$$\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)}=\frac{\cos 0+\sqrt{-1}\sin 0}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)}=$$
$$=\rho^{-m'}[\cos(-m'\varphi)+\sqrt{-1}\sin(-m'\varphi)],$$

что и требовалось доказать.

III. Приложенія.

Укажемъ на нѣкоторыя приложенія предыдущихъ формулъ.

§ 303. Теорема. — *Всякій трехчленъ вида x^4+px^2+q разлагается на два вещественныхъ множителя второй степени.*

Полагаемъ $x^2=z$ и различимъ два случая:

1. Предположимъ, что уравненіе второй степени:

$$z^2+pz+q=0$$

имѣетъ два вещественныхъ корня: α и β; такъ какъ

$$z^2+pz+q=(z-\alpha)(z-\beta),$$

то

$$x^4+px^2+q=(x^2-\alpha)(x^2-\beta).$$

2. Предположимъ, что уравненіе второй степени:

$$z^2+pz+q=0$$

имѣетъ два мнимыхъ корня: $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ и $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; такъ какъ

$$z^2+pz+q=(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})(z-\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

то

$$x^4+px^2+q=(x^2-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x^2-\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

или

$$x^4+px^2+q=(x-\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})\times$$
$$\times(x-\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}).$$

Полагая же

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$
$$\alpha-\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

найдемъ (§§ 292 и 301):

$$\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$
$$\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Слѣдовательно,

$$x^4+px^2+q=$$
$$=\left[x-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left[x+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[x-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left[x+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right];$$

соединяя по-парно сопряженные множители — первый съ третьимъ, а второй съ четвертымъ, — получаемъ:

$$x^4+px^2+q=$$
$$=\left[\left(x-\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2+\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]\left[\left(x+\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2+\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}\right].$$

Такимъ образомъ трехчленъ разложенъ на два вещественныхъ множителя второй степени.

§ 304. Задача.—*Выразить* $\cos m\varphi$ *и* $\sin m\varphi$ *въ функціи отъ* $\cos\varphi$ *и* $\sin\varphi$.

Пишемъ:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi;$$

развертываемъ первую часть по формулѣ бинома и результатъ приравниваемъ второй части, т. е. пишемъ, что равны между собою отдѣльно вещественныя части и отдѣльно мнимыя:

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots,$$
$$\sin m\varphi = m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots$$

§ 305. Задача — *Представить* $x^m + \frac{1}{x^m}$, *какъ функцію отъ* $x + \frac{1}{x}$.

Полагаемъ

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{x} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

откуда, съ одной стороны,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi,$$

а съ другой,

$$x^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi, \quad \frac{1}{x^m} = \cos m\varphi - \sqrt{-1}\sin m\varphi$$

и, значитъ,

$$x^m + \frac{1}{x^m} = 2\cos m\varphi.$$

Такимъ образомъ, формула, выражающая $\cos m\varphi$ въ функціи отъ $\cos\varphi$, дастъ возможность выразить и $\dfrac{x^m + \frac{1}{x^m}}{2}$ въ функціи отъ $x + \frac{1}{x}$.

Замѣчаніе. — Для полученія искомой формулы мы придали x мнимое значеніе

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi;$$

поэтому возникаетъ вопросъ, распространяется ли нашъ результатъ на какое-угодно вещественное значеніе x. Чтобы доказать общность

формулы, нужно замѣтить, что по освобожденіи отъ знаменателей она будетъ степени $2m$; изъ теоріи же уравненій извѣстно, что она должна быть тождествомъ, если будетъ справедлива болѣе, чѣмъ для $2m$ вещественныхъ или мнимыхъ значеній перемѣнной.

КОНСПЕКТЪ.

§ 290. Припоминается, что мнимыя выраженія введены въ цѣляхъ обобщенія, особенно важнаго въ дальнѣйшей алгебрѣ.—**§ 291.** Мнимое выраженіе, не будучи ни для какой величины мѣрою, не есть число, но при помощи надлежащихъ соглашеній, оно можетъ быть съ пользою вводимо въ вычисленія —**§ 292.** Обыкновенно мнимымъ выраженіямъ придаютъ видъ: $a+b\sqrt{-1}$.—**§ 293** Всякое мнимое выраженіе есть корень квадратнаго уравненія; второй же корень называется сопряженнымъ выраженіемъ.—**§ 294.** Послѣдовательныя степени $\sqrt{-1}$.—**§ 295.** Произведеніе мнимыхъ множителей не измѣняется отъ ихъ перестановки.—**§ 296.** Приложеніе предыдущей теоремы къ доказательству одной алгебраической формулы относительно вещественныхъ чиселъ —**§ 297.** Тригонометрическій видъ мнимыхъ выраженій; опредѣленіе модуля и аргумента.—**§ 298.** Произведеніе двухъ мнимыхъ выраженій.—**§ 299.** Частное двухъ мнимыхъ выраженій.—**§ 300.** Цѣлыя степени мнимаго выраженія.—**§§ 301** и **302.** Распространеніе полученнаго результата на случай показателей: дробнаго и отрицательнаго.—**§§ 303, 304** и **305.** Приложеніе предыдущихъ формулъ къ нѣкоторымъ вопросамъ, въ которые входятъ только вещественныя количества.

УПРАЖНЕНІЯ.

I. Доказать, безъ помощи тригонометрическихъ выраженій, что

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$$

есть вида

$$p+q\sqrt{-1}.$$

Примѣняется методъ, подобный изложенному въ I, § 275.

II. Найти вещественные и мнимые корни уравненія:

$$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

Отв.: $$x=\pm 8,\ x=\pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{-1}$$

III. Если n обозначаетъ нечетное число, взаимно-простое съ 3, то $(x+y)^n-x^n-y^n$ обращается въ нуль при $x=y\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.

Примѣняется формула Моавра (§ 300).

IV. Рѣшить уравненіе:

$$x^6 - 2x^3 \cos\varphi + 1 = 0.$$

Находимъ два значенія для x^3, которыя дадутъ 6 значеній для x, стоитъ только замѣнить φ всѣми дугами, имѣющими одинъ и тотъ же синусъ и одинъ и тотъ же косинусъ.

V. Опредѣлить мнимыя выраженія, m-ая степень которыхъ,—вещественна.

Отв.: $$\rho\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right).$$

VI. Найти мнимое выраженіе, кубъ котораго равенъ единицѣ. Такихъ выраженій существуетъ два, каждое изъ которыхъ есть квадратъ другого.

Отв.: $$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

VII. Называя черезъ α выраженіе, кубъ котораго равенъ единицѣ, показать справедливость формулы:

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Выполняются указанныя дѣйствія.

VIII. Модуль суммы двухъ мнимыхъ выраженій меньше суммы и больше разности ихъ модулей.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Рѣшеніе уравненій третьей степени.

I. Общія формулы для рѣшенія уравненій третьей степени.

§ 306 Приведеніе общаго уравненія.—Пусть дано уравненіе третьей степени:

$$\varphi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Полагаемъ

$$x = x' + h;$$

пишемъ:

$$\varphi(x'+h) = \varphi(h) + x'\varphi'(h) + \frac{x'^2}{1.2}\varphi''(h) + \frac{x'^3}{1.2.3}\varphi'''(h);$$

приравниваемъ $\varphi''(h)$ нулю:

$$6h + 2a = 0, \text{ или } h = -\frac{a}{3},$$

и получаемъ уравненіе относительно x', не содержащее члена съ x'^2, оно будетъ вида:

$$x'^3 + px' + q = 0. \tag{2}$$

Подъ этимъ послѣднимъ видомъ мы и будемъ изучать уравненіе третьей степени, опустивъ, разумѣется, значекъ надъ буквою x.

§ 307. Рѣшеніе уравненія: $x^3 = 1$.—Начнемъ съ болѣе простого уравненія:

$$x^3 = 1. \tag{1}$$

Одинъ изъ его корней, очевидно, $x = 1$. Чтобы получить два другихъ, пишемъ данное уравненіе въ видѣ:

$$x^3 - 1 = 0$$

и дѣлимъ первую часть на $(x-1)$; получаемъ уравненіе:

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

корни котораго суть:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Итакъ, единица имѣетъ одинъ вещественный кубическій корень, равный 1, и два мнимыхъ кубическихъ корня.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи одинъ изъ этихъ двухъ послѣднихъ корней мы будемъ обозначать буквою α, при чемъ другой выразится черезъ α^2, что не трудно провѣрить.

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Кромѣ того, ясно, что если

$$\alpha^3 = 1,$$

то также

$$\alpha^6 = 1, \text{ или } (\alpha^2)^3 = 1;$$

значить α^2 должно быть корнемъ уравненія (1) во всѣхъ случаяхъ, когда само α ему удовлетворяетъ.

§ 308. Алгебраическое рѣшеніе уравненія третьей степени.—Вернемся теперь къ уравненію:

$$x^3+px+q=0, \tag{1}$$

къ которому можетъ быть приведено (§ 306) всякое уравненіе третьей степени; для рѣшенія его полагаемъ:

$$x=y+z;$$

тогда оно перейдетъ въ слѣдующее:

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0,$$

или

$$y^3+z^3+(y+z)(3yz+p)+q=0.$$

Такъ какъ y и z подчинены здѣсь одному только условію, чтобы сумма ихъ равнялась искомому корню x, то мы можемъ связать ихъ между собою произвольнымъ соотношеніемъ и положить, напр.,

$$3yz+p=0; \tag{2}$$

въ такомъ случаѣ уравненіе приметъ видъ:

$$y^3+z^3+q=0. \tag{3}$$

Рѣшить же уравненія: (2) и (3) не трудно, замѣтивъ, что они даютъ сумму и произведеніе количествъ: y^3 и z^3, именно,

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27}, \qquad y^3+z^3=-q;$$

въ самомъ дѣлѣ, y^3 и z^3 являются, такимъ образомъ, корнями уравненія:

$$u^3+qu-\frac{p^3}{27}=0,$$

откуда получаемъ для этихъ двухъ количествъ соотвѣтственно

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Слѣдовательно,

$$x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (4)$$

§ 309. Число корней, получаемыхъ по этой формулѣ.—Выведенная формула требуетъ нѣкоторыхъ поясненій. Какое-угодно число A имѣетъ три кубическихъ корня, потому что уравненіе $x^3 = A$ непремѣнно имѣетъ три корня. Чтобы получить всѣ эти три корня, достаточно знать только одинъ изъ нихъ, который и придется умножить послѣдовательно на α и на α^2, что, очевидно, не измѣнять его куба (§ 307).

На основаніи этихъ соображеній формула (4), повидимому, должна была бы дать девять рѣшеній; въ самомъ дѣлѣ, каждый радикалъ имѣетъ три значенія и ничто не указываетъ на какую-либо зависимость между ними. Должно, однако, замѣтить, что эта зависимость существуетъ. Дѣйствительно, такъ какъ

$$yz = -\frac{p}{3}, \quad (2)$$

то произведеніе двухъ радикаловъ непремѣнно вещественное и равно $-\frac{p}{3}$. Поэтому, если A и B суть два значенія кубическихъ корней, удовлетворяющихъ этому условію, такъ что одинъ изъ корней предложеннаго уравненія выразится суммою:

$$x_1 = A + B,$$

и, слѣдовательно, остальныя значенія для y и z, кромѣ A и B, будутъ:

$$\begin{matrix} \alpha A, & \alpha^2 A, \\ \alpha B, & \alpha^2 B, \end{matrix}$$

то ясно, что комбинаціи, дающія вещественное произведеніе AB, могутъ быть только слѣдующія:

$$x_2 = \alpha A + \alpha^2 B,$$
$$x_3 = \alpha B + \alpha^2 A;$$

итакъ, число рѣшеній приводится къ тремъ, что и должно было выйти.

II. Условія вещественности корней уравненія: $x^3+px+q=0$.

§ 310. Какіе могутъ представиться случаи.—Прежде всего замѣчаемъ, что уравненія:

$$\begin{cases} x^3+px+q=0, \\ x^3+px-q=0 \end{cases}$$

имѣютъ корни соотвѣтственно равные, но съ противоположными знаками; дѣйствительно, если $x=\alpha$ удовлетворитъ одному уравненію, то $x=-\alpha$ удовлетворитъ другому. Поэтому, ограничимся изслѣдованіемъ, когда уравненіе:

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

можетъ имѣть всѣ три корня вещественные при q положительномъ.

По правилу Декарта мы немедленно заключаемъ, что p должно быть отрицательнымъ, потому что въ противномъ случаѣ уравненіе (1) не имѣло бы ни одной перемѣны, и послѣ замѣны x на $-x$:

$$-x^3-px+q=0$$

имѣло бы только одну перемѣну, а слѣдовательно, отрицательный корень былъ бы только одинъ, а положительныхъ не было бы вовсе.

§ 311. Условія вещественности—Итакъ, изслѣдуемъ только тотъ случай, когда p отрицательно. Тогда уравненіе, по правилу Декарта, имѣетъ отрицательный корень только одинъ; положительныхъ же корней оно можетъ имѣть или два, или не имѣть ихъ вовсе. Разсмотримъ эти два случая.

Данное уравненіе можетъ быть написано въ видѣ:

$$q=-x^3-px=x(-p-x^2),$$

при чемъ p есть отрицательное число.

Если x измѣняется отъ 0 до $\sqrt{-p}$, то произведеніе $x(-p-x^2)$ сначала увеличивается отъ нуля до нѣкотораго maximum'а, затѣмъ уменьшается и снова обращается въ нуль при $x=\sqrt{-p}$. Поэтому, если maximum превосходитъ q, то найдется два значенія для x, при которыхъ это произведеніе равно q, и уравненіе будетъ имѣть

два положительныхъ корня меньшихъ, чѣмъ $\sqrt{-p}$. Если maximum второй части меньше q, то равенство невозможно для значеній x между 0 и $\sqrt{-p}$, а слѣдовательно, для всѣхъ положительныхъ значеній x; дѣйствительно, вторая часть вышла бы отрицательною, если бы x^2 было бы больше $-p$. Наконецъ, если случится, что maximum второй части какъ разъ равенъ q, то равенство можетъ имѣть мѣсто только для одного значенія x и два корня будутъ равными. Итакъ, условіе вещественности всѣхъ трехъ корней выразится неравенствомъ:

$$\max.[x(-p-x^2)] < q.$$

Этотъ maximum соотвѣтствуетъ значенію x, обращающему производную въ нуль, иначе говоря, онъ удовлетворяетъ уравненію:

$$-p-3x^2=0.$$

При этомъ значеніи, равномъ $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, произведеніе $x(-p-x^2)$ обратится въ

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}, \text{ или } \sqrt{-\frac{4p^3}{27}};$$

слѣдовательно условіе вещественности всѣхъ трехъ корней есть:

$$q<\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}, \text{ или } 4p^3+27q^2<0.$$

Кромѣ того, нужно, какъ мы видѣли, чтобы p было отрицательнымъ; но это условіе, очевидно, необходимо для существованія предыдущаго неравенства и, поэтому, безполезно упоминать о немъ особо

§ 312. Заключеніе.—На основаніи предыдущаго и на основаніи общихъ принциповъ теоріи уравненій мы можемъ высказать слѣдующія предложенія относительно уравненія:

$$x^3+px+q=0. \tag{1}$$

1. *Сумма* всѣхъ трехъ корней равна нулю. Если одинъ изъ нихъ мнимый вида $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, то непремѣнно будетъ еще и другой мнимый корень вида $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ и, притомъ, только одинъ.

2. *Извѣстный членъ* равенъ произведенію всѣхъ трехъ корней,

взятому съ обратнымъ знакомъ. Если два уравненія вида (1) различаются между собою только знакомъ при извѣстномъ членѣ, то ихъ корни будутъ соотвѣтственно равны, но противоположны по знаку. Такъ, напр., корни уравненія:

$$x^3 - 39x + 70 = 0$$

суть 2, 5 и —7, а корни уравненія:

$$x^3 - 39x - 70 = 0$$

суть —2, —5 и +7.

3 При *p положительномъ* уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня.

4 При *p отрицательномъ* уравненіе имѣетъ три *вещественныхъ* и *неравныхъ* корня, если $\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)$ отрицательно; оно имѣетъ три *вещественныхъ* корня, изъ которыхъ два *равны*, если $\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)$ есть нуль; наконецъ, оно имѣетъ два *мнимыхъ* корня, если $\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)$ положительно. Такъ, напр., слѣдующія уравненія имѣютъ:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 100x \pm 16 = 0 \\ x^3 + 12x \pm 16 = 0 \\ x^3 \pm 16 = 0 \\ x^3 - 7x \pm 16 = 0 \end{array}\right\} \text{2 мнимыхъ корня,}$$

$$x^3 - 12x \pm 16 = 0 \quad \text{2 равныхъ вещественныхъ корня,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 20x \pm 16 = 0 \\ x^3 - 100x \pm 16 = 0 \end{array}\right\} \text{3 неравныхъ вещественныхъ корня.}$$

III. Тригонометрическое рѣшеніе уравненій третьей степени.

§ 313. Теперь мы покажемъ, какъ при помощи тригонометрическихъ функцій можно опредѣлить прямо всѣ корни, вещественныя или мнимыя, уравненія третьей степени.

Случай I. Вещественные корни.—Условіе:

$$\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right) < 0.$$

Когда уравненіе (1) имѣетъ всѣ три корня вещественные и неравные, то количество подъ радикаломъ второй степени (**§ 308**)

отрицательно и значеніе (4) для x представитъ сумму двухъ мнимыхъ количествъ. Чтобы избавиться отъ этихъ мнимыхъ символовъ, полагаемъ

$$-\frac{q}{2}=\rho\cos\varphi \text{ и } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\rho^2\sin^2\varphi;$$

тогда формула (4) приметъ видъ:

$$x=\sqrt[3]{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi\sqrt{-1}},$$

а эта, по формулѣ Моавра (§ 301), перейдетъ въ слѣдующую:

$$x=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\sqrt{-1}\right)+$$
$$+\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\sqrt{-1}\right),$$

гдѣ k нужно придавать значенія: 0, 1, 2. Кромѣ того, k непремѣнно должно имѣть одно и то же значеніе въ этихъ двухъ членахъ, чтобы произведеніе yz вышло вещественнымъ. Итакъ,

$$x=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},$$

откуда для трехъ значеній k находимъ соотвѣтственно:

$$x=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3},\ 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^0\right),\ 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^0\right),$$

или

$$x=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3},\ -2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right),\ 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right).$$

Для опредѣленія значеній ρ и φ (ρ, какъ модуль, всегда положительно) имѣемъ равенства:

$$\rho^2\cos^2\varphi=\frac{q^2}{4},\qquad \rho^2\sin^2\varphi=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27};$$

изъ нихъ выводимъ, что

$$\rho^2=-\frac{p^3}{27}, \text{ или } \rho=\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

и

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2\rho}.$$

Замѣчаніе.—Если значеніе для $\cos\varphi$ получится отрицательное, то отыскиваемъ въ таблицахъ дугу φ', имѣющую тотъ же косинусъ, но взятый положительно; дуга же φ будетъ дополненіемъ дуги φ' до 180^0.

§ 314. Примѣръ I.—*Раздѣлить полусферу на двѣ равныя части плоскостью, параллельною основанію.*

Пусть

x будетъ разстояніе дѣлящей плоскости до центра сферы,
y » радіусъ кругового сѣченія,
r » радіусъ сферы, равный 1.

Составляемъ уравненіе:

$$\frac{2r^2\pi}{3}(r-x)-\frac{xy^2\pi}{3}=\frac{r^3\pi}{3}.$$

А такъ какъ

$$y^2=r^2-x^2,$$

то

$$2(1-x)-x(1-x^2)=1,$$

или

$$x^3-3x+1=0;$$

изъ этого уравненія и опредѣляемъ x.

Здѣсь $p=-3$, $q=1$; слѣдовательно,

$$\rho=\sqrt[2]{\frac{27}{27}}=1,\ \cos\varphi=-\frac{q}{2\rho}=-\frac{1}{2};$$

$$\varphi=120^0 \text{ и } \frac{\varphi}{3}=40^0.$$

Итакъ, три корня даннаго уравненія будутъ:

$$\begin{cases} x_1= & 2\cos 40^0= & 1{,}5320888,\\ x_2= & -2\cos 20^0= & -1{,}8793852,\\ x_3= & 2\cos 80^0= & 0{,}3472964. \end{cases}$$

Провѣряемъ и находимъ, что $x_1+x_2+x_3=0$.

Изъ этихъ трехъ корней только послѣдній отвѣчаетъ предложенной задачѣ; дѣйствительно, только онъ одинъ положителенъ и меньше радіуса сферы.

§ 315. Примѣръ II.—*Опредѣлить абсциссы точекъ пересѣченія параболы* $x^2=4y$ *и гиперболы* $4xy=7(x-1)$.

Исключая y, получимъ уравненіе:

$$x^3-7x+7=0,$$

корни котораго опредѣлятъ абсциссы точекъ пересѣченія. Имѣемъ:

$$p=-7,\ q=+7;$$

$$\log(-p^3)=2{,}53529412$$
$$\log 27=1{,}43136376$$
$$\log\rho^2=1{,}10393036$$
$$\log\rho=0{,}55196518$$
$$\log\sqrt[3]{\rho}=0{,}18398839$$

$$\log q=0{,}84509804$$
$$\text{Доп.}\log 2-10=1{,}69897000$$
$$\text{Доп.}\log\rho-10=1{,}44803482$$
$$\log\cos\varphi'=\bar{1}{,}99210286$$
$$\varphi'=10^0 53'36'',195$$
$$\varphi=169^0 6'23'',805$$

$$\frac{\varphi}{3}=56^0 22'7'',935,\quad \left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right)=3^0 37'52'',065,$$
$$\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right)=63^0 37'52'',065$$

$$\log\cos\frac{\varphi}{3}=\bar{1},743\ 3874$$
$$\log 2=0{,}301\ 0300$$
$$\log\sqrt[3]{\rho}=0{,}183\ 9884$$
$$\log x_1=0{,}228\ 4058$$
$$x_1=1{,}692021,$$

$$\log\cos\left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right)=\bar{1},999\ 1272$$
$$=0{,}301\ 0300$$
$$=0{,}183\ 9884$$
$$\log(-x_2)=0{,}484\ 1456$$
$$x_2=\quad 3{,}048917,$$

$$\log\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right)=\bar{1},647\ 5281$$
$$=0{,}301\ 0300$$
$$=0{,}183\ 9884$$
$$\log x_3=0{,}132\ 5465$$
$$x_3=1{,}356896.$$

Повѣрка.

$$x_1=\quad 1{,}692021$$
$$x_2=-3{,}048917$$
$$x_3=\quad 1{,}356896$$
$$x_1+x_2+x_3=0.$$

$$\log x_1=0{,}228\ 4058$$
$$\log x_2=0{,}484\ 1456$$
$$\log x_3=0{,}132\ 5465$$
$$\log x_1x_2x_3=0{,}845\ 0979$$
$$x_1x_2x_3=7.$$

§ 316. Случай II. Мнимые корни.—Условіе:

$$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0.$$

1) *Случай, когда p отрицательно.* Имѣемъ:

$$\frac{q^2}{4}>-\frac{p^3}{27}$$

и, слѣдовательно, можемъ положить:

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\sin\omega.$$

Въ такомъ случаѣ

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=\sqrt[3]{-q\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega}=\sqrt[3]{-q\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

или, послѣ замѣны q его значеніемъ $\frac{2}{\sin\omega}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$,

$$y=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\tang\frac{\omega}{2}}\ \text{ и }\ z=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cot\frac{\omega}{2}}.$$

Вводимъ теперь вспомогательный уголъ φ, опредѣляемый изъ уравненія:

$$\tang\varphi=\sqrt[3]{\tang\frac{\omega}{2}};$$

тогда

$$y=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\tang\varphi,\quad z=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\varphi$$

и, слѣдовательно, значенія x будутъ:

$$-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\tang\varphi+\cot\varphi)=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{2}{\sin2\varphi}$$

и

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{p}{3}}(\tang\varphi+\cot\varphi)\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-p}(\tang\varphi-\cot\varphi),$$

или

$$-\frac{1}{\sin2\varphi}\sqrt{-\frac{p}{3}}\mp\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-p}\cot2\varphi;$$

формулы, удобныя для логариѳмическихъ вычисленій.

Ищемъ:

$$1)\quad \sin\omega = \frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

далѣе,

$$2)\quad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}},$$

затѣмъ,

$$3)\quad x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cosec}2\varphi$$

и, наконецъ,

$$4)\quad x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cosec}2\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-p}\cot 2\varphi.$$

Относительно знаковъ корней надо замѣтить, что вещественный корень противоположенъ по знаку извѣстному члену уравненія и что сумма всѣхъ трехъ корней равна нулю.

§ 317. Примѣръ III.—Дано уравненіе:

$$x^3 - 10{,}871385x + 18{,}01032 = 0.$$

Имѣемъ:

$$p = -10{,}871385,\quad q = +18{,}01032;$$

слѣдовательно, $\log\left(-\frac{p^3}{27}\right) = 1{,}677\;4908$

и $\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = 0{,}838\;7454;$

далѣе, $\log 2 = 0{,}301\;0300$

и Доп. $\log q - 10 = \bar{2}{,}744\;4786$

1) $\log\sin\omega = \bar{1}{,}884\;2540,$

откуда $\omega = 50^0$, и $\frac{\omega}{2} = 25^0$.

$$\log\operatorname{tang}^3\varphi = \log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \bar{1}{,}668\;6725,$$

2) $\log\operatorname{tang}\varphi = \bar{1}{,}889\;5575,$

откуда $\varphi = 37^0 47' 31'',287$

и $2\varphi = 75^0 35' 2'',574;$

3) $\log \sqrt{\frac{p}{3}} = 0{,}279\ 5818$

$\log 2 = 0{,}301\ 0300$

Доп. $\log \sin 2\varphi = 10 - 0{,}013\ 8941$

$\log z_1 = 0{,}594\ 5059$

$z_1 = 3{,}931026.$

$\log \sqrt{p} = 0{,}518\ 1424$

$\log \cot 2\varphi = \overline{1}{,}410\ 0229$

$\log \sqrt{p \cot 2\varphi} = \overline{1}{,}928\ 1653$

$\sqrt{p \cot 2\varphi} = 0{,}847\ 5501$

Итакъ, корни будутъ слѣдующіе:

$$z = 3{,}931026$$

и

$$x = +1{,}965513 \pm 0{,}8475501 \times \sqrt{-1}.$$

§ 318. Примѣръ IV — *Опредѣлить размѣры вписаннаго въ шаръ цилиндра, боковая поверхность котораго равна выпуклой поверхности двухъ шаровыхъ сегментовъ, имѣющихъ съ нимъ общее основаніе.*

Пусть будутъ:

r — радіусъ шара, равный 1,
y — радіусъ основанія цилиндра
и x — разстояніе этого основанія до центра шара.

Пишемъ равенство:

$$4\pi(1-x) = 4xy\pi,$$

но такъ какъ

$$y = \sqrt{1-x^2},$$

то

$$1-x = x^2(1+x),$$

или

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Преобразовываемъ это уравненіе, полагая

$$x = \frac{z-1}{3};$$

получаемъ:

$$z^3 + 6z - 34 = 0.$$

Здѣсь $p = 6$, $q = -34$ и

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 297;$$

значитъ уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня, разыскивать которыхъ мы не будемъ, такъ какъ они не могутъ удовлетворить усло-

віямъ задачи. Рѣшая непосредственно данное уравненіе, по формулѣ (§ 308), получаемъ:

$$z=\sqrt[3]{17+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{17-\sqrt{297}}=$$
$$=\sqrt[3]{34{,}2336879396}-\sqrt[3]{0{,}2336879396}.$$

Извлекая кубическіе корни съ помощію логариѳмическихъ таблицъ, находимъ:

$$z=3{,}2470172-0{,}6159499,$$

или

$$z=2{,}6310673;$$

слѣдовательно,

$$x=0{,}5436891$$

и

$$2x=1{,}0873782, \text{ высота цилиндра.}$$

§ 319 *2) Случай, когда p положительно.* Полагаемъ:

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\operatorname{tang}\omega; \qquad (1)$$

тогда

$$y=\sqrt[3]{\frac{-q\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} \text{ и } z=-\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}},$$

или, послѣ замѣны q его значеніемъ $2\cot\omega\sqrt{\frac{p^3}{27}}$,

$$y=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}} \text{ и } z=-\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\cot\frac{\omega}{2}}.$$

Вводя вспомогательный уголъ φ:

$$\operatorname{tang}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}}, \qquad (2)$$

получаемъ:

$$y=\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tang}\varphi, \quad z=-\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi;$$

слѣдовательно, искомые корни суть:

$$\left.\begin{aligned} x_{1\text{ и }2}&=2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi\pm\sqrt{-p}\operatorname{cosec}2\varphi,\\ x_3&=-\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

§ 320. Примѣръ V.—Дано уравненіе:

$$x^3+2{,}3473983x-9{,}876543=0.$$

$$q=-9{,}876543, \qquad p=2{,}3473983$$

$$\log(-q)=0{,}994\ 6050, \qquad \log p=0{,}370\ 5868;$$

слѣдовательно,

$$\log\frac{p^3}{27}=\bar{1}{,}680\ 3966$$

$$\log\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\bar{1}{,}840\ 1983$$

$$\log 2=0{,}301\ 0300$$

$$\text{Доп.}\log(-q)-10=\bar{1}{,}005\ 3950$$

$$\log\operatorname{tang}\omega=\bar{1}{,}146\ 6233, \qquad (1)$$

откуда

$$\omega=7^0 58' 42'',91,$$

$$\frac{\omega}{2}=3^0 59' 21'',455;$$

далѣе,

$$\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}=\log\operatorname{tang}^3\varphi=\bar{2}{,}843\ 4760;$$

значитъ,

$$\log\operatorname{tang}\varphi=\bar{1}{,}614\ 4920 \qquad (2)$$

и

$$\varphi=22^0 22' 22'',22,$$

$$2\varphi=44^0 44' 44'',44.$$

Наконецъ,

$$\log 2=0{,}301\ 0300$$

$$\log\cot 2\varphi=0{,}003\ 8555$$

$$\log\sqrt{\frac{p}{3}}=\bar{1}{,}946\ 7328$$

$$(3) \qquad \log x_1=0{,}251\ 6183$$

$$x_1=1{,}784918;$$

$$\text{Доп.}\log\sin 2\varphi-10=0{,}152\ 4513$$

$$\log\sqrt{p}=0{,}185\ 2934$$

$$\log\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}=0{,}337\ 7447$$

$$\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}=2{,}1764300.$$

Итакъ, корни даннаго уравненія будутъ:

$$x_1=1{,}784918,$$

$$x_{2\text{ и }3}=-0{,}892459\pm 2{,}176430\times\sqrt{-1}.$$

КОНСПЕКТЪ.

§ 306. Приведеніе общаго уравненія третьей степени къ виду $x^3+px+q=0$.—§ 307. Рѣшеніе уравненія: $x^3=1$. § 308. Алгебраическое рѣшеніе уравненія $x^3+px+q=0$. § 309. Доказывается, что предыдущая формула даетъ только три корня. § 310. Изслѣдованіе случаевъ, когда всѣ три корня не могли бы быть вещественными.—§ 311. Условіе вещественности корней.—§ 312. Заключеніе.—§ 313. Рѣшеніе уравненій третьей степени посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ; случай вещественныхъ корней.—§§ 314 и 315. Примѣры.—§ 316. Случай, когда два корня—мнимые, а коэффиціентъ при второмъ членѣ отрицателенъ.—§§ 317 и 318. Примѣры.—§ 319. Случай, когда коэффиціентъ при второмъ членѣ положителенъ.—§ 320. Примѣръ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Численное рѣшеніе двухъ уравненій второй степени.

I. Общій методъ; примѣры.

§ 321. Задача.—Начнемъ съ рѣшенія слѣдующаго вопроса:

При какомъ условіи неизвѣстная y въ уравненіи второй степени:

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad (1)$$

получаетъ значеніе вида $Mx+N$, гдѣ M и N не зависятъ отъ x.

Изъ уравненія (1), какъ уравненія второй степени относительно y, выводимъ:

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)}. \qquad (2)$$

Чтобы это значеніе y было требуемаго вида, необходимо и достаточно, чтобы многочленъ, стоящій подъ корнемъ,

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)$$

представлялъ полный квадратъ, а для этого должно быть:

$$(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF);$$

опускаемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства одинаковые члены B^2D^2 и затѣмъ дѣлимъ обѣ части на общаго множителя $4A$; получаемъ:

$$-BDE+AE^2=4ACF-FB^2-CD^2. \tag{3}$$

Это и есть искомое условіе. Если оно выполнено, то значеніе для y принимаетъ видъ:

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right). \tag{4}$$

§ 322. Общій методъ рѣшенія—Рѣшимъ теперь систему двухъ численныхъ уравненій второй степени:

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \tag{5}$$
$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'y+F'=0 \tag{6}$$

Умножаемъ первое изъ этихъ уравненій на произвольный множитель λ и затѣмъ оба уравненія складываемъ; вновь полученное уравненіе можетъ замѣнить одно изъ данныхъ. Такимъ образомъ

$$(A\lambda+A')y^2+(B\lambda+B')xy+(C\lambda+C')x^2+(D\lambda+D')y+$$
$$+(E\lambda+E')x+(F\lambda+F')=0. \tag{7}$$

Произвольное λ мы можемъ выбрать такъ, чтобы значенія для y, выведенныя изъ уравненія (7), были бы первой степени относительно x. Для этого достаточно положить (§ 321):

$$-(B\lambda+B')(D\lambda+D')(E\lambda+E')+(A\lambda+A')(E\lambda+E')^2=$$
$$=4(A\lambda+A')(C\lambda+C')(F\lambda+F')-(F\lambda+F')(B\lambda+B')^2$$
$$-(C\lambda+C')(D\lambda+D')^2. \tag{8}$$

Это уравненіе—третьей степени относительно λ и, слѣдовательно, будетъ имѣть, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень. Этотъ корень вычисляемъ приближенно и затѣмъ пользуемся формулою (4) (§ 321); получаемъ два значенія для y вида:

$$y=Mx+N,\ y=M_1x+N_1,$$

гдѣ M, N, M_1, N_1—извѣстныя, выраженныя въ функціи отъ корня λ. Подставляя послѣдовательно эти значенія y въ одно изъ уравненій: (5) или (6), получимъ два уравненія второй степени отно-

сительно x. Слѣдовательно, всего мы найдемъ четыре значенія для x и столько же для y.

§ 323. Изслѣдованіе.—При приложеніи предыдущаго метода встрѣчается нѣсколько случаевъ, которые мы разберемъ съ нѣкоторыми подробностями. Прежде всего мы замѣтимъ, для большей простоты, что задача сводится къ опредѣленію пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка. Указанный методъ равносиленъ предварительному опредѣленію прямыхъ, соединяющихъ по двѣ точки пересѣченія.

1. Если уравненіе третьей степени относительно λ имѣетъ три вещественныхъ корня и если въ то же время, по крайней мѣрѣ, два изъ этихъ корней дѣлаютъ положительнымъ количество:

$$(B\lambda + B')^2 - 4(A\lambda + A')(C\lambda + C') = k,$$

то такихъ два корня опредѣляютъ двѣ пары вещественныхъ сѣкущихъ, пересѣкающихся вообще въ четырехъ точкахъ. Эти четыре точки суть точки пересѣченія обѣихъ кривыхъ, а координаты ихъ даютъ рѣшенія данныхъ уравненій.

2. Если уравненіе третьей степени имѣетъ три такихъ вещественныхъ корня, изъ которыхъ только одинъ дѣлаетъ положительнымъ количество k, или если уравненіе имѣетъ только одинъ вещественный корень, но такой, который удовлетворяетъ этому условію, то двѣ кривыя имѣютъ только одну пару общихъ сѣкущихъ. Въ этомъ случаѣ придется еще рѣшить, будутъ ли эти сѣкущія встрѣчать какую-нибудь изъ данныхъ кривыхъ, или нѣтъ; въ первомъ случаѣ оба уравненія будутъ имѣть два вещественныхъ рѣшенія и два мнимыхъ, во второмъ—четыре мнимыхъ рѣшенія.

3. Наконецъ, если вещественные корни уравненія относительно λ дѣлаютъ отрицательнымъ количество k, то оба уравненія имѣютъ четыре мнимыхъ рѣшенія.

§ 324. Примѣръ I.—*Даны два уравненія:*

$$3y^2 + 4xy + 3x^2 - 9y - 15x = 0 \quad \textit{(эллипсъ)}.$$
$$y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 10x = 0 \quad \textit{(парабола)}.$$

Рѣшаемъ эти уравненія совмѣстно:

$$(3 + \lambda)y^2 + (4 - 2\lambda)xy + (3 + \lambda)x^2 - (9 - 2\lambda)y - (15 + 10\lambda)x = 0,$$

откуда уравненіе (8) относительно λ будетъ:

$$32\lambda^3 + 388\lambda^2 + 564\lambda + 189 = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ три вещественныхъ отрицательныхъ корня

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{9}{8},\ \lambda_3 = -\frac{21}{2}.$$

Количество:

$$k = -20(1 + 2\lambda)$$

положительно или равно нулю для каждаго изъ трехъ значеній λ; слѣдовательно, данныя кривыя допускаютъ три системы общихъ вещественныхъ сѣкущихъ, точки пересѣченія которыхъ совпадаютъ съ точками пересѣченія кривыхъ.

Итакъ, остается опредѣлить системы сѣкущихъ и найти точки ихъ встрѣчи. При

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

оба уравненія первой степени будутъ:

$$y = -x + 2 \pm 2,$$

система двухъ параллельныхъ прямыхъ.

При

$$\lambda = -\frac{21}{2}$$

тѣ же уравненія будутъ.

$$y = \frac{5x}{3} - 2 \pm \left(\frac{4x}{3} + 2\right).$$

Точки пересѣченія четырехъ сѣкущихъ суть слѣдующія:

$$x = 0,\quad y = 0,$$
$$x = 1,\quad y = 3,$$
$$x = 3,\quad y = -3,$$
$$x = 6,\quad y = -2.$$

Эти четыре точки представляютъ вершины трапеціи, образованной четырьмя сѣкущими. Двѣ остальныя сѣкущія, соотвѣтствующія $\lambda = -\frac{9}{8}$, будутъ діагоналями этой трапеціи.

§ 325 Примѣръ II.—*Опредѣлить точки пересѣченія кривыхъ:*

$$xy - 3x + 6 = 0 \text{ (гипербола)},$$
$$x^2 - 9y = 0 \text{ (парабола)}.$$

Если въ первомъ изъ этихъ уравненій подставить на мѣсто y его значеніе изъ второго уравненія,

$$y = \frac{x^2}{9},$$

то получится непосредственно уравненіе третьей степени:

$$x^3 - 27x + 54 = 0,$$

корни котораго опредѣляютъ точки пересѣченія обѣихъ кривыхъ. Это уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня: два положительныхъ и равныхъ, $x = 3$, и одинъ отрицательный, $x = -6$. Соотвѣтственныя ординаты будутъ:

$$y = 1 \text{ и } y = 4.$$

Итакъ, кривыя *касаются* въ точкѣ $(3,1)$ и пересѣкаются въ точкѣ $(-6,4)$.

§ 326 Примѣръ III.—*Даны два уравненія:*

$$y^2 + x^2 - 2x = 0 \text{ (кругъ)},$$
$$2xy - 1 = 0 \text{ (гипербола)}.$$

Разсматривая ихъ совмѣстно, составляемъ уравненіе.

$$y^2 + 2\lambda xy + x^2 - 2x - \lambda = 0;$$

полагая, что оно выражаетъ двѣ прямыя, находимъ:

$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0.$$

Это послѣднее уравненіе имѣетъ одинъ вещественный корень и два мнимыхъ.

Чтобы вычислить вещественный корень, мы воспользуемся формулами **§ 316**-го:

$$\log\sin\omega = 1{,}585\ 3481,$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = 1{,}301\ 3783,$$
$$\log\operatorname{tang}\varphi = 1{,}767\ 1261,$$
$$\log\sin 2\varphi = \bar{1}{,}940\ 3459,$$
$$\log\lambda = 0{,}122\ 1235,$$
$$\lambda = 1{,}324718.$$

Количество $k = 4(\lambda^2 - 1)$ или $\frac{1}{\lambda}$ положительно при только-что найденномъ значенiи λ; поэтому, оба уравненiя первой степени,

$$y = -\lambda x \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x + \lambda),$$

будутъ имѣть вещественные коэффицiенты и, слѣдовательно, обѣ кривыя допускаютъ систему двухъ общихъ вещественныхъ сѣкущихъ.

Подставляя эти два значенiя y въ уравненiе кривой:

$$2xy - 1 = 0,$$

получаемъ уравненiе второй степени:

$$2x^2\left(-\lambda \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \pm \frac{2\lambda x}{\sqrt{\lambda}} - 1 = 0;$$

чтобы значенiя x были вещественными, необходимо, чтобы

$$-\lambda \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0.$$

При нижнемъ знакѣ первая часть неравенства отрицательна и условiе вещественности является невыполненнымъ; отсюда вытекаетъ, что прямая:

$$y = -\lambda x - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(x + \lambda)$$

не встрѣчается съ кривою.

Наоборотъ, при верхнемъ знакѣ первая часть положительна и сѣкущая:

$$y = -\lambda x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x + \lambda)$$

встрѣчаетъ кривую въ двухъ точкахъ. Подставляя въ послѣднее уравненіе на мѣсто λ и $\sqrt{\lambda}$ ихъ численныя значенія, находимъ:

$$y = -0{,}455881x + 1{,}150964;$$

это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ кривой:

$$2xy - 1 = 0$$

даетъ два вещественныхъ рѣшенія для заданной системы:

$$x = 1{,}967160, \quad y = 0{,}254173,$$

и

$$x = 0{,}557424, \quad y = 0{,}896791.$$

§ **327. Примѣръ IV.**—*Рѣшить систему двухъ уравненій:*

$$4y^2 + 9x^2 - 36x = 0 \ (\textit{эллипсъ}),$$
$$xy - 12 = 0 \ (\textit{гипербола}).$$

Условное уравненіе:

$$\lambda^3 - 144\lambda - 432 = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ всѣ три корня вещественные: первый—положительный и содержится между 13 и 14, два другіе—отрицательные и содержатся между -3 и -4 и между -10 и -11. Изъ этихъ трехъ корней только первый дѣлаетъ положительнымъ количество

$$k = \lambda^2 - 144 = \frac{432}{\lambda};$$

слѣдовательно, существуетъ только одна пара вещественныхъ сѣкущихъ:

$$y = -\frac{\lambda x}{8} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}\left(x + \frac{2\lambda}{3}\right)}.$$

Докажемъ прямо, что ни одна изъ этихъ двухъ прямыхъ не можетъ встрѣчать заданныхъ кривыхъ. Дѣйствительно, подставляя значеніе y во второе изъ двухъ данныхъ уравненій:

$$xy - 12 = 0,$$

получаемъ два уравненія второй степени:

$$x^2\left(-\frac{\lambda}{8} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) \pm x\sqrt{3\lambda} - 12 = 0,$$

условіе вещественности корней котораго есть:

$$3\lambda+48\left(-\frac{\lambda}{8}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)>0,$$

или

$$-\lambda\pm24\sqrt{\frac{3}{\lambda}}>0;$$

очевидно, что это условіе не будетъ выполнено, если при радикалѣ взять отрицательный знакъ, потому что тогда всѣ члены въ лѣвой части вышли бы отрицательными, но и при положительномъ знакѣ это условіе не удовлетворяется, такъ какъ $\lambda>13$. Отсюда заключаемъ, что обѣ прямыя не могутъ встрѣчать кривыхъ и, слѣдовательно, заданная система уравненій имѣетъ только мнимые корни.

§ 328. Примѣръ V.—*Даны двѣ гиперболы:*

$$4y^2-4xy+9=0,$$
$$8xy-42y+9=0;$$

опредѣлить точки ихъ пересѣченія.

Значеніе y изъ второго уравненія, подставленное въ первое, приводитъ къ уравненію второй степени относительно x:

$$4x^2-35x+75=0,$$

имѣющему два вещественныхъ корня: $x=5$ и $x=3\frac{3}{4}$. Соотвѣтственныя значенія y будутъ: $y=\frac{9}{2}$ и $y=\frac{3}{4}$.

Но такъ какъ обѣ заданныя кривыя суть гиперболы, отнесенныя къ общей асимптотѣ, какъ оси абсциссъ, то кромѣ двухъ только-что найденныхъ точекъ пересѣченія, онѣ имѣютъ еще двѣ другія точки встрѣчи, на безконечно-далекомъ разстояніи отъ начала. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя x черезъ $\frac{1}{z}$ и приравнивая другъ другу значенія y, выведенныя изъ обоихъ данныхъ уравненій, получаемъ уравненіе четвертой степени:

$$5z^2-35z^3+75z^4=0,$$

четыре корня котораго слѣдующіе:

$$z^2=0,\ \text{откуда}\ z=0,$$
$$z=\frac{1}{5}\ \text{и}\ z=\frac{4}{15},$$

и такъ какъ $x = \frac{1}{z}$, то для данныхъ уравненій мы будемъ имѣть четыре рѣшенія:

$$\begin{aligned}
&z=0, \quad && x=\infty, \quad && y=0,\\
&z=0, && x=-\infty, && y=0,\\
&z=\frac{1}{5}, && x=5, && y=\frac{9}{2},\\
&z=\frac{4}{15}, && x=3\frac{3}{4}, && y=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

§ 329. Частные случаи. — Рѣшеніе двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными приводится, въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, къ рѣшенію или биквадратнаго уравненія, или уравненія второй степени.

1. Когда обѣ кривыя—*концентрическія* и отнесены къ ихъ общему центру, какъ началу, то уравненія ихъ не будутъ содержать членовъ первой степени относительно перемѣнныхъ и исключеніе одной перемѣнной дастъ биквадратное уравненіе относительно другой перемѣнной

Примѣръ:

$$\begin{aligned}
16y^2-16xy+5x^2-400&=0 \ \textit{(эллипсъ)},\\
y^2-x^2+16&=0 \ \textit{(гипербола)}.
\end{aligned}$$

Рѣшенія по-парно равны, но противоположны по знаку.

2. Когда обѣ кривыя—*гомофокальны* и отнесены къ ихъ общему фокусу, какъ началу координатъ, то оба уравненія примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
y^2+x^2&=(ay+bx+c)^2,\\
y^2+x^2&=(a'y+b'x+c')^2,
\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$ay+bx+c=\pm(a'y+b'x+c'),$$

или

$$(a\pm a')y+(b\pm b')x+(c\pm c')=0,$$

каждое изъ этихъ двухъ уравненій первой степени разсматриваемъ совмѣстно съ однимъ изъ заданныхъ уравненій.

Примѣръ:

$$\begin{aligned}
3y^2-4xy+4y-2x+1&=0 \ \textit{(гипербола)},\\
y^2-2xy+x^2-3y-3x-\frac{9}{4}&=0 \ \textit{(парабола)}.
\end{aligned}$$

3. Если обѣ кривыя имѣютъ общій *діаметръ* и отнесены къ системѣ косоугольныхъ координатъ, въ которой за ось абсциссъ принятъ общій діаметръ, а за ось ординатъ прямая параллельная хордамъ, то оба уравненія будутъ содержать перемѣнную y только во второй степени; исключая эту перемѣнную, мы нашу задачу приведемъ къ рѣшенію уравненія второй степени относительно x.

Примѣръ:

$$2y^2 - 3x - 36 = 0 \text{ (парабола)},$$
$$y^2 + 5x^2 - 80 = 0 \text{ (эллипсъ)}.$$

4. Если обѣ кривыя *подобны* и *сходственно расположены*, то коэффиціенты членовъ второй степени въ обоихъ уравненіяхъ соотвѣтственно пропорціональны; умножая въ такомъ случаѣ одно изъ уравненій на надлежащій множитель и вычитая изъ другого уравненія, получимъ въ результатѣ уравненіе первой степени.

Примѣръ:

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 6x + 40 = 0 \text{ (гипербола)},$$
$$2y^2 + 2xy - 6x^2 - 5y + 37 = 0 \text{ (гипербола)}.$$

5. Если обѣ кривыя представляютъ гиперболы съ *общею асимптотою* и отнесены къ этой асимптотѣ, какъ оси x-овъ, то оба уравненія содержатъ перемѣнную x только въ членѣ съ xy; въ этомъ случаѣ исключеніе x дастъ уравненіе второй степени относительно y.

Примѣръ:

$$y^2 - 4xy + 6y - 10 = 0,$$
$$3y^2 + 2xy - 10y + 8 = 0.$$

II. Рѣшеніе уравненій четвертой степени.

§ 330. Методъ рѣшенія.—По только-что изложенному методу мы приводимъ рѣшеніе уравненія четвертой степени:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

къ рѣшенію уравненія третьей степени. Въ самомъ дѣлѣ, если въ данномъ уравненіи замѣнить x^2 черезъ y, то получится уравненіе:

$$y^2 + axy + by + cx + d = 0,$$

а это значитъ, что рѣшеніе уравненія четвертой степени приведено къ рѣшенію двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными, которыя мы можемъ рѣшить посредствомъ уравненія третьей степени относительно λ.

§ 331. **Примѣръ.**—Дано уравненіе:

$$x^4-2x^3-8x^2+12x-4=0,$$

не имѣющее соизмѣримыхъ корней.

Полагаемъ

$$x^2=y \text{ (\textit{парабола})};$$

въ такомъ случаѣ данное уравненіе приметъ видъ:

$$y^2-2xy-8y+12x-4=0 \text{ (\textit{гипербола})}.$$

Рѣшеніе же этихъ двухъ уравненій приводится къ рѣшенію уравненія третьей степени:

$$\lambda^3+16\lambda^2+56\lambda-64=0,$$

имѣющаго три вещественныхъ корня:

$$\lambda=-8 \text{ и } \lambda=-4\pm2\sqrt{6}.$$

Количество

$$k=4(1-\lambda)$$

положительно при каждомъ изъ этихъ трехъ значеній λ; слѣдовательно, данныя уравненія имѣютъ три пары общихъ сѣкущихъ и четыре вещественныхъ рѣшенія. Уравненія сѣкущихъ, соотвѣтствующихъ второму и третьему корню уравненія относительно λ, слѣдующія:

$$\begin{cases} \lambda=-4+2\sqrt{6}, \\ y=x+2+\sqrt{6}\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})\left(x-\dfrac{4+\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \lambda=-4-2\sqrt{6}, \\ y=x+2-\sqrt{6}\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})\left(x-\dfrac{4+\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}\right). \end{cases}$$

Отыскивая точки пересѣченія этихъ двухъ системъ прямыхъ, получаемъ непосредственно корни уравненія четвертой степени:

$$x=2\pm\sqrt{2} \text{ и } x= \quad 1\pm\sqrt{3}.$$

КОНСПЕКТЪ.

§ 321. Условіе, при которомъ уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными приводится къ двумъ уравненіямъ первой степени.—§ 322. Приведеніе двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными къ уравненію третьей степени.—§ 323. Перечисленіе различныхъ случаевъ.—§§ 324, 325, 326, 327 и 328. Примѣры.—§ 329. Частные случаи.—§ 330. Рѣшеніе уравненія четвертой степени.—§ 331. Примѣръ.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Примѣры нѣкоторыхъ замѣчательныхъ алгебраическихъ преобразованій.

§ 332. Цѣль этой главы.—Во многихъ случаяхъ правила исчисленія въ ихъ общемъ видѣ приводятъ къ чрезвычайно сложнымъ выкладкамъ. Искусство математика—упростить дѣйствія, пользуясь частнымъ видомъ поставленнаго вопроса, и такимъ образомъ придти болѣе прямымъ путемъ къ ожидаемому результату Подобныя упрощенія требуютъ большаго навыка въ анализѣ и нерѣдко даже истинной геніальности въ изобрѣтеніи методовъ; понятно, что мы не можемъ дать общихъ правилъ для такихъ преобразованій. Мы ограничимся изложеніемъ нѣсколькихъ, наиболѣе извѣстныхъ, алгебраическихъ примѣровъ, въ которыхъ знаменитые математики довели до высокой степени свое аналитическое искусство.

§ 333. Задача I.—*Данъ многочленъ второй степени съ тремя перемѣнными:*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D; \quad (1)$$

требуется замѣнить x, y, z тремя новыми перемѣнными такими, которыя съ первыми связаны соотношеніями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w, \\ y &= \beta u + \beta' v + \beta'' w, \\ z &= \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и подчинены слѣдующимъ условіямъ:

1. *Многочленъ долженъ принять видъ:*

$$Gu^2 + G'v^2 + G''w^2 + Hu + H'v + H''w + K, \qquad (3)$$

2. *Девять коэффиціентовъ:* α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' *должны быть связаны соотношеніями.*

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эта задача встрѣчается въ аналитической геометріи при упрощеніи уравненія второй степени посредствомъ замѣны однѣхъ прямоугольныхъ осей координатъ другими, прямоугольными же.

Умножаемъ соотвѣтственно уравненія (2) на α, β, γ и затѣмъ складываемъ ихъ по-членно, принимая во вниманіе уравненія (4); находимъ:

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z;$$

точно такъ же

$$\begin{aligned} v &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ w &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, чтобы многочлены: (1) и (3) были равнозначащими, должно существовать тождество между членами второй степени:

$$\begin{aligned} G(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + G''(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2 = \\ = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy, \end{aligned}$$

а это даетъ шесть слѣдующихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} G\alpha^2 + G'\alpha'^2 + G''\alpha''^2 &= A, \\ G\beta^2 + G'\beta'^2 + G''\beta''^2 &= A', \\ G\gamma^2 + G'\gamma'^2 + G''\gamma''^2 &= A'', \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta'' &= B'', \\ G\alpha\gamma + G'\alpha'\gamma' + G''\alpha''\gamma'' &= B', \\ G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma'' &= B. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Умножаемъ первое, четвертое и пятое уравненія группы (5) соотвѣтственно на α, β, γ и затѣмъ складываемъ ихъ.

$$G\alpha = A\alpha + B''\beta + B'\gamma. \qquad (A)$$

Умножая второе, четвертое и шестое уравненія той же группы соотвѣтственно на β, α и γ и складывая, находимъ:

$$G\beta = A'\beta + B''\alpha + B\gamma; \tag{A}$$

точно такъ же

$$G\gamma = A''\gamma + B'\alpha + B\beta. \tag{A}$$

Эти три равенства представляютъ уравненія первой степени относительно α, β, γ; поэтому, для каждой неизвѣстной можно получить лишь одно значеніе, *если только* общій знаменатель не нуль. Замѣчая же, что, съ одной стороны, эти уравненія удовлетворяются при

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

а съ другой, что такое рѣшеніе не допустимо въ силу соотношеній (4), выводимъ, что знаменатель долженъ быть равенъ нулю, т.-е. что

$$(A-G)(A'-G)(A''-G) - B^2(A-G) - B'^2(A'-G) - B''^2(A''-G) + \\ + 2BB'B'' = 0,$$

уравненіе третьей степени относительно G. Умножая первое, четвертое и пятое уравненія группы (5) соотвѣтственно на α', β', γ', получаемъ:

$$G'\alpha' = A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma'; \tag{B}$$

точно такъ же найдемъ:

$$G'\beta' = A'\beta' + B''\alpha' + B\gamma', \tag{B}$$
$$G'\gamma' = A''\gamma' + B'\alpha' + B\beta', \tag{B}$$

откуда, подобно предыдущему, выводимъ, что знаменатель неизвѣстныхъ: α', β', γ', опредѣляемыхъ изъ этихъ трехъ уравненій, долженъ быть равенъ нулю, т.-е. что

$$(A-G')(A'-G')(A''-G') - B^2(A-G') - B'^2(A'-G') - B''^2(A''-G') + \\ + 2BB'B'' = 0.$$

Наконецъ, такимъ же путемъ получимъ равенство:

$$(A-G'')(A'-G'')(A''-G'') - B^2(A-G'') - B'^2(A'-G'') - \\ - B''^2(A''-G'') + 2BB'B'' = 0.$$

Итакъ, G, G', G'' суть три корня уравненія третьей степени:

$$(A-x)(A'-x)(A''-x)-B^2(A-x)-B'^2(A'-x)-B''^2(A''-x)+ \\ +2BB'B''=0. \qquad (6)$$

Можно доказать, что это уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня. Для этого замѣтимъ, что ему можно придать видъ:

$$\frac{P}{(A-x)-P}+\frac{P'}{(A'-x)-P'}+\frac{P''}{(A''-x)-P''}=-1; \qquad (7)$$

въ самомъ дѣлѣ, если мы освободимся отъ знаменателей въ этомъ уравненіи (7) и результатъ сравнимъ тождественно съ уравненіемъ (6), то получимъ уравненія:

$$2P'P''=B^2,\ 2P''P=B'^2,\ 2PP'=B''^2,\ PP'P''=BB'B'',$$

которыя удовлетворяются при

$$P=\frac{B'B''}{B},\ P'=\frac{BB''}{B'},\ P''=\frac{B'B}{B''};$$

такимъ образомъ, уравненіе (6) приметъ видъ:

$$\frac{\frac{B'B''}{B}}{A-x-\frac{B'B''}{B}}+\frac{\frac{BB''}{B'}}{A'-x-\frac{BB''}{B'}}+\frac{\frac{B'B}{B''}}{A''-x-\frac{B'B}{B''}}+1=0. \qquad (8)$$

Далѣе, чтобы доказать вещественность всѣхъ трехъ корней этого уравненія, полагаемъ:

$$A-\frac{B'B''}{B}=\lambda,\ A'-\frac{BB''}{B'}=\mu,\ A''-\frac{B'B}{B''}=\nu$$

и допустимъ, что эти три количества расположены въ возрастающемъ порядкѣ, т.-е. что λ есть наименьшее, а ν—наибольшее изъ нихъ. Обозначая черезъ ε очень малое число, подставляемъ послѣдовательно на мѣсто x въ первую часть уравненія (8) величины:

$$-\infty,\ \lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon,\ \mu-\varepsilon,\ \mu+\varepsilon,\ \nu-\varepsilon,\ \nu+\varepsilon,\ +\infty;$$

$-\infty$ и $+\infty$ обратятъ первую часть въ $+1$; результатъ же другихъ подстановокъ усматривается непосредственно, потому что

каждая изъ нихъ обращаетъ какой-нибудь одинъ изъ членовъ въ безконечно большую величину. Кромѣ того, замѣчаемъ, что всѣ три числителя—одного знака, одинаковаго со знакомъ $BB'B''$; чтобы на чемъ-нибудь остановиться, предположимъ, что этотъ знакъ есть $+$. Результаты выразятся слѣдующею таблицею:

$-\infty$	$+$
$\lambda-\varepsilon$	$+$
$\lambda+\varepsilon$	$-$
$\mu-\varepsilon$	$+$
$\mu+\varepsilon$	$-$
$\nu-\varepsilon$	$+$
$\nu+\varepsilon$	$-$
$+\infty$	$+$

Итакъ, подстановки даютъ шесть перемѣнъ знака, но при этомъ между $\lambda-\varepsilon$ и $\lambda+\varepsilon$, $\mu-\varepsilon$ и $\mu+\varepsilon$, $\nu-\varepsilon$ и $\nu+\varepsilon$ функція проходитъ черезъ ∞ и претерпѣваетъ разрывъ непрерывности; поэтому, должно заключить о существованіи только трехъ корней: одного—между $\lambda+\varepsilon$ и $\mu-\varepsilon$, другого—между $\mu+\varepsilon$ и $\nu-\varepsilon$, и третьяго—между $\nu+\varepsilon$ и ∞; иначе говоря, эти корни лежатъ соотвѣтственно между λ и μ, μ и ν, ν и ∞. Очевидно, что они неравны во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда λ, μ и ν различны.

Рѣшивъ уравненіе (6) и найдя значенія G, G' и G'', мы изъ уравненій первой степени: (A), (B), (C) опредѣлимъ отношенія количествъ: α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''.

Предоставляемъ читателю изслѣдовать различные частные случаи, какіе можетъ представить это рѣшеніе, и, въ особенности, тотъ изъ нихъ, когда λ, μ и ν равны.

§ 334. Задача II.—*Рѣшить слѣдующую систему трехъ уравненій:*

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1. \tag{3}$$

Эти уравненія встрѣчаются при разысканіи пересѣченія такихъ трехъ поверхностей второго порядка, главныя сѣченія которыхъ имѣютъ общіе фокусы.

Освобождаясь отъ знаменателей въ этихъ уравненіяхъ, получаемъ:

$$\mu^6-\mu^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+\mu^2(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2)-$$
$$-b^2c^2x^2=0,$$
$$\nu^6-\nu^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+\nu^2(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2)-$$
$$-b^2c^2x^2=0,$$
$$\rho^6-\rho^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+\rho^2(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2)-$$
$$-b^2c^2x^2=0.$$

Отсюда видно, что μ^2, ν^2, ρ^2 суть три корня уравненія:

$$X^3-X^2(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+X(b^2c^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2)-$$
$$-b^2c^2x^2=0; \tag{4}$$

слѣдовательно, имѣемъ уравненіе:

$$\rho^2\mu^2\nu^2=b^2c^2x^2,$$

изъ котораго опредѣляется x^2.

Для полученія y^2 и z^2 замѣтимъ, что если положить

$$\mu^2-b^2=\mu'^2,$$
$$\nu^2-b^2=\nu'^2,$$
$$\rho^2-b^2=\rho'^2,$$

то данныя уравненія преобразуются въ слѣдующія:

$$\frac{y^2}{\mu'^2}+\frac{x^2}{\mu'^2+b^2}+\frac{z^2}{\mu'^2+(b^2-c^2)}=1,$$
$$\frac{y^2}{\nu'^2}+\frac{x^2}{\nu'^2+b^2}+\frac{z^2}{\nu'^2+(b^2-c^2)}=1,$$
$$\frac{y^2}{\rho'^2}+\frac{x^2}{\rho'^2+b^2}+\frac{z^2}{\rho'^2+(b^2-c^2)}=1,$$

отличающіяся отъ первыхъ только тѣмъ, что x^2 и y^2 измѣнены на y^2 и x^2, ρ, μ и ν на ρ', μ' и ν', b^2 на $-b^2$ и c^2 на c^2-b^2. Поэтому, можно написать:

$$b^2(c^2-b^2)y^2=(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)(b^2-\rho^2)$$

Подобнымъ же путемъ находимъ:

$$c^2(c^2-b^2)z^2=(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)(c^2-\rho^2).$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій и опредѣляются x^2 и y^2.

Значенія x^2, y^2 и z^2 можно было бы получить непосредственнымъ рѣшеніемъ данныхъ уравненій, которыя всѣ—первой степени относительно этихъ количествъ, но выкладки при такомъ способѣ были бы значительно длиннѣе.

Замѣтимъ, наконецъ, что такъ какъ ρ^2, μ^2 и ν^2 суть корни уравненія (4), то

$$\rho^2+\mu^2+\nu^2=b^2+c^2+x^2+y^2+z^2$$

и, слѣдовательно,

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2+\mu^2+\nu^2-b^2-c^2,$$

формула, полезная при многихъ разысканіяхъ; непосредственная повѣрка ея требуетъ нѣкоторыхъ выкладокъ.

§ 335. Задача III.—*Пусть v, v' v'', . . . обозначаютъ слѣдующія линейныя функціи:*

$$\left.\begin{aligned} v\ &=ax+by+cz+\ldots+l, \\ v'\ &=a'x+b'y+c'z+\ldots+l', \\ v''&=a''x+b''y+c''z+\ldots+l'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

отъ неизвѣстныхъ x, y, z, . . . и пусть число этихъ функцій выше числа неизвѣстныхъ. Найти среди всѣхъ системъ коэффиціентовъ $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, . . . , независящихъ отъ x, y, z, . . , и дающихъ тождество:

$$\varkappa v+\varkappa'v'+\varkappa''v''+\ldots=x-K, \qquad (k)$$

такую, при которой сумма:

$$\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\ldots$$

была бы наименьшею (minimum).

Полагаемъ:

$$\left.\begin{aligned} av+a'v'+a''v''+\ldots&=\xi, \\ bv+b'v'+b''v''+\ldots&=\eta, \\ cv+c'v'+c''v''+\ldots&=\zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ξ, η, ζ, . . . будутъ линейными функціями отъ x, y, z, . . . и выразятся черезъ эти послѣднія слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l}\xi = x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \ldots + \Sigma al,\\ \eta = x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc + \ldots + \Sigma bl,\\ \zeta = x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 + \ldots + \Sigma cl,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{array}\right\} \quad (3)$$

гдѣ

$$\begin{array}{l}\Sigma a^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots ,\\ \Sigma ab = ab + a'b' + a''b'' + \ldots ,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Число количествъ: ξ, η, ζ, ... равно числу n неизвѣстныхъ: x, y, z, ... ; поэтому, можно получить посредствомъ исключенія уравненіе вида:

$$x = A + (\alpha\alpha)\xi + (\alpha\beta)\eta + (\alpha\gamma)\zeta + \ldots , \quad (A)$$

въ которомъ $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, ... суть коэффиціенты, независящіе отъ x, y, z, ... , а ξ, η, ζ, ...—величины, которыя мы умѣемъ находить. Это уравненіе удовлетворится тождественно при замѣнѣ ξ, η, ζ, ... ихъ значеніями (3); слѣдовательно, полагая

$$\left.\begin{array}{l}a\,(\alpha\alpha) + b\,(\alpha\beta) + c\,(\alpha\gamma) + \ldots = \alpha,\\ a'(\alpha\alpha) + b'(\alpha\beta) + c'(\alpha\gamma) + \ldots = \alpha',\\ a''(\alpha\alpha) + b''(\alpha\beta) + c''(\alpha\gamma) + \ldots = \alpha'',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{array}\right\} \quad (4)$$

умножая, затѣмъ, эти уравненія соотвѣтственно на v, v', v'', ... и складывая ихъ, мы будемъ имѣть, на основаніи уравненій (2) и (A), тождество:

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \ldots = x - A, \quad (5)$$

если только замѣнимъ v, v', v'', ... ихъ значеніями (1).

Полученное уравненіе показываетъ, что между различными системами коэффиціентовъ: $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... , удовлетворяющихъ условію (k), должна находиться система

$$\varkappa = \alpha,\ \varkappa' = \alpha',\ \varkappa'' = \alpha''.$$

Кромѣ того, при всякой системѣ, вычитая тождество (5) изъ тождества (k), находимъ тождество:

$$(\varkappa - \alpha)v + (\varkappa' - \alpha')v' + (\varkappa'' - \alpha'')v'' + \ldots = A - K;$$

отсюда, замѣняя v, v', v'', . . . ихъ значеніями (1) и приравнивая нулю коэффиціенты при x, y, z, . . . , выводимъ:

$$(\varkappa-\alpha)a+(\varkappa'-\alpha')a'+(\varkappa''-\alpha'')a''+\ldots=0,$$
$$(\varkappa-\alpha)b+(\varkappa'-\alpha')b'+(\varkappa''-\alpha'')b''+\ldots=0$$
$$(\varkappa-\alpha)c+(\varkappa'-\alpha')c'+(\varkappa''-\alpha'')c''+\ldots=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Умножаемъ найденныя уравненія на $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$ $(\alpha\gamma)$, . . . и складываемъ; въ силу системы (4) получится:

$$(\varkappa-\alpha)\alpha+(\varkappa'-\alpha')\alpha'+(\varkappa''-\alpha'')\alpha''+\ldots=0;$$

удваиваемъ обѣ части этого равенства и вычитаемъ изъ тождества:

$$\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\ldots=\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\ldots;$$

результатъ будетъ:

$$\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\ldots=\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots+(\varkappa-\alpha)^2+(\varkappa'-\alpha')^2+\ldots$$

Слѣдовательно, выраженіе:

$$\varkappa^2+\varkappa'^2+\varkappa''^2+\ldots$$

будетъ имѣть minimum при

$$\varkappa=\alpha,\ \varkappa'=\alpha',\ \varkappa''=\alpha'',\ \ldots$$

§ 336. Выраженіе minimum'а.—Значенія α, α', α'', . . . заданы уравненіями (4); чтобы получить ихъ, достаточно подставить туда вмѣсто $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ значенія, которыя мы можемъ вывести изъ уравненій (3) посредствомъ извѣстныхъ пріемовъ. Minimum же мы найдемъ слѣдующимъ образомъ. Изъ тождества (5) вытекаютъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\ldots&=1,\\ b\alpha+b'\alpha'+b''\alpha''+\ldots&=0,\\ c\alpha+c'\alpha'+c''\alpha''+\ldots&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

если замѣнить въ немъ v, v', v'', . . . ихъ значеніями (1) и приравнять тождественно другъ другу коэффиціенты при x, y, z, . . . въ обѣихъ частяхъ. Умножаемъ эти уравненія соотвѣтственно на

$(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, . . . и складываемъ, при чемъ принимаемъ во вниманіе соотношенія (4); получимъ:

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots=(\alpha\alpha).$$

Такимъ образомъ $(\alpha\alpha)$ есть искомый minimum.

§ 337. Значенія, принимаемыя x, y, z, . . . —Если бы v, v', v'', . . . были бы нулями, то изъ тождества (5) слѣдовало бы, что значеніе x, удовлетворяющее уравненіямъ (1), было бы $x=A$. Но такъ какъ число уравненій:

$$v=0,\ v'=0,\ v''=0,\ \ldots$$

превышаетъ число неизвѣстныхъ, то, вообще говоря, невозможно удовлетворить строго этимъ уравненіямъ. Въ такомъ случаѣ математики принимаютъ значеніе $x=A$, какъ удовлетворяющее уравненіямъ съ возможною степенью точности. Подобное же вычисленіе дало бы значенія для y, z, . . . ; обозначаемъ эти послѣднія черезъ B, C, . . . Невозможно, чтобы эти значенія обращали въ нуль всѣ количества v, v', v'', . . . , но можно доказать, что они обращаютъ сумму ихъ квадратовъ въ сколь-угодно малую величину. Сначала же мы выяснимъ, почему принято нами извѣстное обозначеніе для коэффиціентовъ въ нашихъ различныхъ формулахъ.

Выше мы нашли:

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots=(\alpha\alpha). \tag{7}$$

Такимъ же пріемомъ можно доказать, что

$$(\alpha\beta)=\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, β, β', β'', . . . удовлетворяютъ формуламъ:

$$\left.\begin{array}{l} a\beta+a'\beta'+a''\beta''+\ldots=0,\\ b\beta+b'\beta'+b''\beta''+\ldots=1,\\ c\beta+c'\beta'+c''\beta''+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\} \tag{8}$$

если, теперь, мы умножимъ значенія α, α', . . . (4) на β, β', . . . и результаты сложимъ, принявъ при этомъ во вниманіе уравненія (8), опредѣляющія β, β', . . . , то найдемъ:

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\ldots=(\alpha\beta); \tag{9}$$

такое же доказательство будетъ и для остальныхъ подобныхъ формулъ. Итакъ, принятое нами обозначеніе для коэффиціентовъ служитъ въ то же время мнемоническимъ правиломъ при составленіи равныхъ имъ выраженій.

§ 338. Minimum для $v^2+v'^2+v''^2+\ldots$ —Если въ уравненіи:

$$v=ax+by+cz+\ldots+l$$

подставимъ на мѣсто $x, y, z, \ldots$ найденное выше значеніе (A) и другія, подобныя ему, значенія, то, имѣя въ виду формулы (4), получимъ.

$$v=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\ldots+\lambda, \tag{10}$$

гдѣ

$$\lambda=aA+bB+cC+\ldots+l.$$

Точно такъ же:

$$\left.\begin{array}{l} v'=\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta+\ldots+\lambda', \\ v''=\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta+\ldots+\lambda'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \tag{10}$$

гдѣ

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'=a'A+b'B+c'C+\ldots+l', \\ \lambda''=a''A+b''B+c''C+\ldots+l'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\}$$

$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ выражаютъ значенія $v, v', v'', \ldots$ при значеніяхъ $x, y, z, \ldots$, равныхъ соотвѣтственно $A, B, C, \ldots$ Полагая, теперь,

$$\Omega=v^2+v'^2+v''^2+\ldots,$$

мы составимъ эту сумму, умножая уравненія (1) соотвѣтственно на $v, v', v'', \ldots$ и результаты складывая; принявъ во вниманіе уравненія (2), найдемъ:

$$\Omega\xi=x+\eta y+\zeta z+\ldots+lv+l'v'+l''v''+\ldots$$

Подставляя на мѣсто $v, v', v'', \ldots$ ихъ значенія, выведенныя выше, и замѣчая, что въ силу тождества (5)

$$\alpha\lambda+\alpha'\lambda'+\alpha''\lambda''+\ldots=-A,$$

получимъ:

$$\Omega=\xi x+\eta y+\zeta z+\ldots-\xi A-\eta B-\zeta C-\ldots+\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\ldots$$

Умножая же соотвѣтственно уравненія, опредѣляющія $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots$ на $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ и складывая ихъ, мы можемъ написать:

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots=\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\ldots+(\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''+\ldots)A+$$
$$+(\lambda b+\lambda' b'+\lambda'' b''+\ldots)B+(\lambda c+\lambda' c'+\lambda'' c''+\ldots)C+\ldots$$

Каждая изъ суммъ, заключенныхъ въ скобки, равна нулю. Дѣйствительно, напр., $(\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''+\ldots)$ есть значеніе, которое принимаетъ ξ въ уравненіи (2), если замѣнить въ немъ $v, v', v'', \ldots$, черезъ $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$, или, что одно и то же, $x, y, z, \ldots$, черезъ $A, B, C, \ldots$; такая же подстановка обратитъ ξ въ нуль, какъ это видно по уравненіямъ: (3) и (A). Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots=\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\ldots$$

и, слѣдовательно,

$$\Omega=\xi(x-A)+\eta(y-B)+\zeta(z-C)+\ldots+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

Подставляя на мѣсто $(x-A)$, $(y-B)$, $(z-C)$, ... значенія, выводимыя изъ уравненія (A) и изъ уравненій, аналогичныхъ съ нимъ, относительно $y, z, \ldots$, находимъ.

$$\Omega=(\alpha\alpha)\xi^2+(\beta\beta)\eta^2+(\gamma\gamma)\zeta^2+\ldots$$
$$+2(\alpha\beta)\xi\eta+2(\alpha\gamma)\xi\zeta+2(\beta\gamma)\eta\zeta+\ldots+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

Это же по формуламъ: (7), (9), (10) приводится къ:

$$\Omega=(v-\lambda)^2+(v'-\lambda')^2+\ldots+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots,$$

откуда видно, что

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2+\ldots$$

есть, какъ мы и предположили, minimum Ω

КОНСПЕКТЪ

§ 332. Цѣль этой главы.—**§ 333.** Упростить первую часть уравненія второй степени съ тремя перемѣнными при переходѣ отъ однихъ прямоугольныхъ осей къ другимъ, прямоугольнымъ же.—**§ 334.** Найти точки пересѣченія такихъ трехъ поверхностей второго порядка, главныя сѣченія которыхъ имѣютъ общіе фокусы.—**§§ 335, 336, 337** и **338.** Рѣшеніе системы, въ которой число неизвѣстныхъ ниже числа уравненій, по условію, чтобы сумма квадратовъ первыхъ частей этихъ уравненій была бы minimum; это есть методъ наименьшихъ квадратовъ.

ДОБАВЛЕНІЕ I.

О рѣшеніи уравненій первой степени.

---

§ 339. Общая формула для значеній неизвѣстныхъ. — Разсмотримъ n уравненій съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_ix_i+\ldots+a_nx_n=l_1, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+\ldots+a_i^2x_i+\ldots+a_n^2x_n=l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^kx_1+a_2^kx_2+a_3^kx_3+\ldots+a_i^kx_i+\ldots+a_n^kx_n=l_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^nx_1+a_2^nx_2+a_3^nx_3+\ldots+a_i^nx_i+\ldots+a_n^nx_n=l_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Здѣсь $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1^2, a_2^2, \ldots, a_i^k, \ldots, a_n^n$ обозначаютъ какіе-угодно коэффиціенты, совершенно независящіе другъ отъ друга такъ, напр., a_1^2 не есть квадратъ a_1: цифра 2 служитъ только указателемъ. Вообще, a_i^k не имѣетъ никакой связи съ a_i и никоимъ образомъ не представляетъ k-ой степени; нижній указатель i есть нумеръ неизвѣстной, а верхній указатель k есть нумеръ уравненія.

Составляемъ произведеніе:

$$P=a_1a_2a_3\ldots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_i-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\ldots$$
$$(a_i-a_2)\ldots(a_n-a_2)(a_4-a_3)\ldots(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1})$$

всѣхъ коэффиціентовъ перваго уравненія на ихъ всевозможныя разности по-парно, при чемъ въ каждой разности вычитаемое взято съ меньшимъ указателемъ, чѣмъ уменьшаемое. Произведеніе P состоитъ изъ большаго числа членовъ, куда количества: $a_1, a_2, \ldots, a_n$

входятъ съ различными показателями; каждый изъ членовъ заключаетъ въ себѣ всѣ буквы: a_1, a_2, . . . , a_n, но показатель каждой изъ нихъ не превосходитъ n. Назовемъ черезъ R выраженіе, въ которое обратится это произведеніе, если принять въ немъ показатели за верхніе указатели; тогда R будетъ состоять изъ различныхъ коэффиціентовъ заданной системы, и каждый изъ нихъ войдетъ въ каждый членъ въ первой степени, потому что, по предположенію, мы замѣнили показатели указателями. Такъ, напр., если k-ая степень отъ a_i входитъ въ произведеніе P, то, чтобы получить R, мы замѣнимъ ее коэффиціентомъ a_i^k при x_i въ k-омъ по порядку уравненіи. Такимъ образомъ, оба выраженія, P и R, будутъ писаться одинаково, хотя и выражаютъ совершенно различныя значенія.

Предположимъ, теперь, что члены R, содержащіе a_i съ однимъ и тѣмъ же верхнимъ указателемъ, соединены въ одинъ; тогда R приметъ видъ:

$$R = A_i^1 a_i^1 + A_i^2 a_i^2 + A_i^3 a_i^3 + \ldots + A_i^k a_i^k + \ldots + A_i^n a_i^n, \qquad (2)$$

гдѣ A_i^1, A_i^2, . . . , A_i^n представляютъ суммы произведеній, въ которыя, очевидно, не входитъ ни одно изъ количествъ: a_i^1, a_i^2, . . . , a_i^n. Можно утверждать, что существуютъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= A_i^1 a_1 + A_i^2 a_1^2 + A_i^3 a_1^3 + \ldots + A_i^n a_1^n, \\
0 &= A_i^1 a_2 + A_i^2 a_2^2 + A_i^3 a_2^3 + \ldots + A_i^n a_2^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= A_i^1 a_k + A_i^2 a_k^2 + A_i^3 a_k^3 + \ldots + A_i^n a_k^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= A_i^1 a_n + A_i^2 a_n^2 + A_i^3 a_n^3 + \ldots + A_i^n a_n^n
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

или, другими словами, что выраженіе R обращается въ нуль, если замѣнить во всѣхъ его членахъ нижній указатель i при буквѣ a какимъ-угодно *другимъ* значеніемъ: 1, 2, . . . , k, . . . , n. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $(a_1 - a_i)(a_2 - a_i) \ldots (a_n - a_i)$ входитъ множителемъ въ выраженіе P, то это послѣднее обратится въ нуль, если положить, напр., $a_i = a_k$; результатъ такой подстановки долженъ быть нулемъ, независимо отъ значенія, приписываемаго буквамъ: a_1, a_2, . . . , a_n. Значитъ, члены должны тождественно уничтожиться, будучи по-парно равными, но съ противоположными знаками. Очевидно, что это тождество останется въ силѣ, если принять

показатели за указатели; а въ такомъ случаѣ мы перейдемъ отъ выраженія P къ выраженію R.

Доказавъ, такимъ образомъ, равенства (3), мы, очевидно, получимъ значеніе x_i, если умножимъ данныя уравненія (1) на A_i^1, A_i^2, . . . , A^n и сложимъ ихъ. Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціенты при $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ выйдутъ равными нулю въ силу уравненій (3), а коэффиціентъ при x_i на основаніи уравненія (2) обратится въ R. Слѣдовательно, будетъ:

$$Rx_i = A_i^1 l_1 + A_i^2 l_2 + \ldots + A_i^n l_n,$$

откуда

$$x_i = \frac{A_i^1 l_1 A_i^2 l_2 + \cdots + A_i^n l_n}{R}. \qquad (4)$$

Итакъ, *составивъ знаменатель R, составляютъ числитель какой-угодно неизвѣстной x_i, замѣняя въ каждомъ членѣ R коэффиціенты: a^1_i, a^2_i, . . . , a^n_i при x_i соотвѣтственными извѣстными членами: $l_1, l_2, \ldots, l_n$.*

Посредствомъ такого пріема мы получимъ значеніе каждой изъ неизвѣстныхъ. Всѣ эти значенія имѣютъ одинъ и тотъ же знаменатель R. Если R не нуль, то каждая неизвѣстная имѣетъ единственное и опредѣленное значеніе, система уравненій въ этомъ случаѣ не представляетъ никакой особенности. Изученіе выраженія R приводитъ къ весьма важной теоріи алгебраическаго анализа, излагать которую мы здѣсь не можемъ.

§ 340. Мы сдѣлаемъ, все-таки, нѣсколько замѣчаній относительно вида знаменателя R и сначала докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема.—*Произведеніе P и, слѣдовательно, выраженіе R измѣняютъ знакъ, не измѣняя своего значенія, если переставить въ нихъ взаимно указатели. c и c'.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ произведеніи P такая перестановка вліяетъ только на тѣ множители, куда входитъ a_c или $a_{c'}$, т.-е на

$$(a_c - a_1)(a_c - a_2) \ldots (a_c - a_{c-1})(a_{c+1} - a_c) \ldots (a_{c'} - a_c) \ldots (a_n - a_c)$$
$$(a_{c'} - a_1) \ldots (a_{c'} - a_{c'-1})(a_{c'} - a_{c+1}) \ldots (a_{c'} - a_{c'-1})(a_{c'+1} - a_{c'}) \ldots (a_n - a_{c'}),$$

при чемъ предполагается, что $c < c'$. Если измѣнить c на c' и c' на c (не измѣняя, понятно, указателей: $c-1$, $c+1$, $c'-1$, $c'+1$, отличныхъ отъ c и c'), то всѣ соотвѣтственные множители сохранятъ одни и тѣ же абсолютныя значенія—произойдетъ только перестановка ихъ,—но нѣкоторые при этомъ измѣнятъ свой знакъ.

1. Множители: $(a_c - a_1)(a_c - a_2) \ldots (a_c - a_{c-1})$ первой строки и

множители: $(a_c - a_1)(a_c - a_2) \ldots (a_{c'} - a_{c-1})$ второй строки перемѣнятся только мѣстами.

2. Множители:

$$(a_{c+1} - a_c)(a_{c+2} - a_c) \ldots (a_{c'-1} - a_c),$$
$$(a_{c'} - a_{c+1})(a_{c'} - a_{c+2}) \ldots (a_{c'} - a_{c'-1})$$

измѣняются по абсолютной величинѣ, но каждый изъ нихъ становится равнымъ своему соотвѣтственному члену въ другой строкѣ, взятому съ противоположнымъ знакомъ. Всѣхъ же такихъ измѣненій въ знакахъ будетъ $2(c' - c - 1)$, что, очевидно, не повліяетъ на знакъ произведенія.

3. Множитель $(a_{c'} - a_c)$ измѣняется только по знаку.

4. Множители:

$$(a_{c'+1} - a_c)(a_{c'+2} - a_c) \ldots (a_n - a_c),$$
$$(a_{c'+1} - a_{c'})(a_{c'+2} - a_{c'}) \ldots (a_n - a_{c'})$$

лишь взаимно переходятъ одинъ въ другой.

Итакъ, произведеніе измѣняется только подъ вліяніемъ измѣненія въ знакѣ $(a_{c'} - a_c)$; слѣдовательно, P и R измѣняются по знаку, безъ измѣненія абсолютной величины, когда c измѣняется въ c', а c' въ c.

§ 341. Слѣдствіе.—Изъ предыдущаго предложенія вытекаетъ, что *въ каждомъ членѣ многочленовъ: P и R показатели двухъ буквъ a_c и $a_{c'}$ непремѣнно различны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ какой-нибудь изъ членовъ этихъ выраженій a_c и $a_{c'}$ входили съ однимъ и тѣмъ же показателемъ, то этотъ членъ не измѣнился бы отъ взаимной перестановки указателей: c и c' и, слѣдовательно, вошелъ бы въ составъ какъ многочлена P, такъ и многочлена $-P$, отличающагося отъ P только знакомъ; отсюда заключаемъ, что онъ вошелъ бы два раза въ P съ различными знаками и могъ бы быть поэтому опущенъ.

Кромѣ того ясно, что каждый членъ содержитъ, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ каждаго изъ множителей: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и такъ какъ показатели этихъ буквъ никогда не превосходятъ n и въ то же время всѣ различны, то они представятъ не что иное, какъ нѣкоторую перестановку чиселъ ряда: $1, 2, \ldots, n$, и общій членъ P (или R, что одно и то же) будетъ:

$$\pm a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначаютъ цѣлыя числа: 1, 2, . . . , n, взятыя въ нѣкоторомъ порядкѣ.

Слѣдовательно, размѣщая множители въ надлежащемъ порядкѣ, можно этотъ общій членъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^1_{\beta_1} a^2_{\beta_2} \ldots a^n_{\beta_n},$$

гдѣ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ также представляютъ числа: 1, 2, . . . , n, взятыя въ нѣкоторомъ порядкѣ.

§ 342. Составленіе R.—Послѣднее замѣчаніе даетъ возможность составить всѣ члены R; останется только выбрать надлежащій знакъ при каждомъ изъ нихъ. Для этого припомнимъ (**§ 340**), что если переставить взаимно въ R два нижнихъ указателя, то R должно измѣнить свой знакъ: положительные члены перейдутъ въ члены, бывшіе до перестановки отрицательными, и обратно. При слѣдующей перестановкѣ двухъ указателей члены, бывшіе первоначально положительными, снова пріобрѣтутъ знакъ $+$ (понятно, что при этомъ не возстановится ихъ прежняя абсолютная величина); вообще, при четномъ числѣ перестановокъ надъ двумя указателями одни положительные члены измѣнятся въ другіе положительные, а при нечетномъ числѣ перестановокъ положительные члены измѣнятся въ члены, бывшіе до этого отрицательными, и обратно. Поэтому, чтобы опредѣлить, будутъ ли два данныхъ члена одного знака, или противоположныхъ, достаточно сосчитать число перестановокъ нижнихъ указателей, необходимыхъ для перехода отъ одного изъ разсматриваемыхъ членовъ къ другому: если это число окажется четнымъ, члены будутъ одного знака, если же—нечетнымъ, члены будутъ съ различными знаками.

Итакъ, для составленія всѣхъ членовъ R принимаютъ за первый

$$a^1_1 a^2_2 a^3_3 \ldots a^n_n,$$

затѣмъ переставляютъ послѣдовательно нижніе указатели, производя каждый разъ только по одной перестановкѣ и каждый же разъ мѣняя знакъ при полученномъ членѣ. Напр., при $n=3$ получимъ:

$$a^1_1 a^2_2 a^3_3 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 - a^1_3 a^2_2 a^3_1 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 - a^1_2 a^2_1 a^3_3;$$

въ этомъ выраженіи каждый членъ получается изъ предыдущаго посредствомъ перестановки двухъ нижнихъ указателей буквы a и перемѣны знака.

КОНСПЕКТЪ.

§ 339. Общая формула для значенія неизвѣстной, удовлетворяющаго системѣ n уравненій съ n неизвѣстными.—**§ 340.** Общій знаменатель измѣняетъ знакъ при взаимной перестановкѣ двухъ нижнихъ указателей. **§ 341.** Верхніе указатели двухъ буквъ въ одномъ и томъ же членѣ непремѣнно различны.— **§ 342** Составленіе общаго знаменателя.

ДОБАВЛЕНІЕ II.

Теорія непрерывныхъ дробей

I. Опредѣленія.

§ 343. Наиболѣе простое, хотя часто весьма недостаточное, приближенное вычисленіе нѣкотораго числа x состоитъ въ нахожденіи его цѣлой части. Если число x меньше единицы, то такой пріемъ не только недостаточенъ, но и совершенно неумѣстенъ. Сказать, что число есть нуль, *не обращая вниманія на дроби*, значитъ допустить *безконечно-огромную* ошибку: послѣдняя, какъ извѣстно, измѣряется отношеніемъ отброшенной части къ полученному приближенному значенію.

Чтобы вычислить нѣкоторое число y, меньшее единицы, можно разсмотрѣть обратное ему значеніе $\frac{1}{y}$, большее единицы; если b есть цѣлая часть $\frac{1}{y}$, то приближенное значеніе y будетъ $\frac{1}{b}$. Поэтому, при вычисленіи x все съ большею и большею точностью мы будемъ полагать:

$$x = a + \frac{1}{x_1},\ \ x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},\ \ x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \ldots,\ x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

при чемъ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ обозначаютъ наибольшія цѣлыя части, содержащіяся въ $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$; итакъ, можно будетъ написать:

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}.$$

Это выраженіе называется непрерывною дробью; она даетъ точное значеніе x. Если отбросить послѣднюю дробь $\frac{1}{x_n}$, останутся только цѣлые знаменатели: a_1, a_2, . . . , a_{n-1} и мы будемъ получать значенія тѣмъ болѣе приближенныя, чѣмъ будетъ больше n. Далѣе мы выведемъ нѣкоторые законы относительно этихъ значеній.

§ 344. Сначала мы докажемъ, что при x соизмѣримомъ непрерывная дробь окончится и что при соотвѣтственномъ значеніи n знаменатель x_n непремѣнно будетъ цѣлымъ числомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x=\frac{P}{P_1}$, гдѣ P и P_1 два цѣлыхъ числа; чтобы получить a, нужно раздѣлить P на P_1 и у насъ будетъ:

$$P=P_1a+P_2.$$

Принимая во вниманіе, что P_2 меньше P_1, пишемъ:

$$\frac{P}{P_1}=a+\frac{P_2}{P_1};$$

слѣдовательно,

$$x_1=\frac{P_1}{P_2},$$

гдѣ a_1 есть цѣлая часть отъ $\frac{P_1}{P_2}$. Пусть, далѣе,

$$P_1=a_1P_2+P_3$$

гдѣ P_3 меньше P_2, откуда выводимъ:

$$\frac{P_1}{P_2}=a_1+\frac{P_3}{P_2}$$

и, слѣдоватаэльно,

$$x_2=\frac{P_2}{P_3};$$

a_2 будетъ цѣлая часть отъ $\frac{P_2}{P_3}$. Очевидно, что a_1, a_2, a_3, . . . представляютъ послѣдовательныя частныя, получаемыя при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ: P и P_1; изъ *Ариѳметики* же извѣстно, что такое разысканіе всегда оканчивается и что одно изъ послѣдовательныхъ дѣленій выйдетъ непремѣнно безъ остатка. Дробь $\frac{P}{P_1}$ выразится въ такомъ случаѣ непрерывною дробью вполнѣ точно.

Обратное заключенiе также справедливо: непрерывная дробь, состоящая изъ конечнаго числа членовъ, всегда можетъ быть обращена, посредствомъ самыхъ простыхъ ариѳметическихъ выкладокъ, въ обыкновенную дробь съ цѣлыми членами.

§ 345. Разсмотримъ непрерывную дробь:

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Подходящими дробями, представляющими послѣдовательныя приближенныя значенiя x, называются выраженiя:

$$a,\quad a+\frac{1}{a_1},\quad a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}},\quad a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}},\quad \ldots;$$

ихъ получаютъ, прерывая непрерывную дробь послѣдовательно на цѣлой части, на первомъ знаменателѣ или *неполномъ частномъ* a_1, на второмъ a_2, на третьемъ a_3, и т. д.

Подходящiя дроби по-перемѣнно меньше и больше x. Въ самомъ дѣлѣ, a, очевидно, меньше истиннаго значенiя непрерывной дроби, потому что для полученiя послѣдней къ a надо придать положительную дробь. Далѣе, $a+\frac{1}{a_1}$ больше истиннаго значенiя, потому что для полученiя изъ этого выраженiя непрерывной дроби надо увеличить знаменатель a_1. Третья подходящая дробь $a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}$ меньше истиннаго значенiя, потому что для полученiя изъ нея непрерывной дроби пришлось бы увеличить a_2 и, слѣдовательно, уменьшить знаменатель $a_1+\frac{1}{a_2}$, а чрезъ это все выраженiе увеличится. Четвертая подходящая дробь $a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}}$ больше истиннаго значенiя непрерывной дроби, потому что для полученiя послѣдней изъ этого выраженiя пришлось бы увеличить a_3 и, слѣдовательно, уменьшить $a_2+\frac{1}{a_3}$, а чрезъ это увеличится знаменатель

дроби $\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}$, прибавляемой къ a, отъ чего эта послѣдняя уменьшится Подобное разсужденіе можно продолжить какъ-угодно далеко.

II. Свойства подходящихъ дробей.

§ 346. Послѣдовательное вычисленіе подходящихъ дробей очень просто. Первая подходящая дробь есть a; вторая подходящая дробь есть

$$a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1};$$

третья подходящая дробь получается изъ второй посредствомъ замѣны a_1 суммою $a_1+\frac{1}{a_2}$, т.-е. будетъ

$$\frac{a\left(a_1+\frac{1}{a_2}\right)+1}{a_1+\frac{1}{a_2}}=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1};$$

четвертая подходящая дробь получается изъ третьей посредствомъ замѣны a_2 суммою $a_2+\frac{1}{a_3}$, т.-е. она будетъ

$$\frac{(aa_1+1)\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)+a}{a_1\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)+1}=\frac{[(aa_1+1)a_2+a]a_3+aa_1+1}{(a_1a_2+1)a_3+a_1}.$$

Подобное вычисленіе прилагается послѣдовательно, безъ всякаго затрудненія, ко всѣмъ подходящимъ дробямъ.

Если $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ двѣ послѣдовательныя подходящія дроби, то слѣдующая подходящая $\frac{P_n}{Q_n}$ выразится чрезъ

$$\frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}},$$

гдѣ a_n есть послѣдній знаменатель или *неполное частное*, входящее въ ея составъ. Это правило составленія повѣряется непосредственно

для первыхъ подходящихъ дробей. Чтобы доказать его общность, допустимъ, что оно справедливо для нѣкотораго значенія n, т.-е. что

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}};$$

чтобы составить слѣдующую подходящую дробь $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, нужно замѣнить a_n суммою $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$; получимъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}} = \frac{(P_{n-1}a_n + P_{n-2})a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})a_{n+1} + Q_{n-1}},$$

или

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Итакъ, это правило составленія прилагается и къ дроби $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ и, слѣдовательно, является общимъ.

§ 347. *Подходящія дроби несократимы.* Пусть $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}$ будутъ три послѣдовательныя подходящія дроби; называя черезъ a_n послѣднее *неполное частное*, входящее въ составъ $\frac{P_n}{Q_n}$, мы можемъ написать:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}}. \qquad (1)$$

Отсюда выводимъ:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_{n-1}(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})} = \frac{P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_{n-1}Q_n}, \qquad (2)$$

точно такъ же

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}}{Q_{n-1}Q_{n-2}}.$$

Числители вторыхъ частей въ двухъ послѣднихъ равенствахъ различаются только знаками; слѣдовательно, вычитая каждую подхо-

дящую дробь изъ ея послѣдующей, мы получимъ рядъ разностей, у которыхъ числители равны по абсолютной величинѣ, но чередуются по знаку; для первыхъ подходящихъ дробей имѣемъ:

$$\frac{P_0}{Q_0}=a, \quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{aa_1+1}{a_1},$$
$$\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{a_1}. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ, постоянный числитель нашихъ разностей здѣсь равенъ единицѣ, а вообще,

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=\pm 1. \qquad (4)$$

Это равенство показываетъ, что подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ несократима, потому что въ противномъ случаѣ P_n и Q_n имѣли бы общаго множителя, который, дѣля оба члена первой части равенства (4), долженъ былъ бы дѣлить и ихъ разность ± 1, что невозможно.

§ 348. *Истинное значеніе непрерывной дроби содержится между двумя послѣдовательными подходящими дробями и ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.*

Разсмотримъ дробь:

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n+\cdots}}}}}$$

Пусть $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ будутъ двѣ послѣдовательныя подходящія дроби и $\frac{P_n}{Q_n}$ та подходящая, въ составъ которой a_n входитъ, какъ послѣднее неполное частное; пишемъ.

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}}.$$

Называемъ выраженіе $a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\cfrac{1}{a_{n+2}+\cdots}}$, цѣлая часть котораго есть a_n, черезъ x_n и замѣняемъ въ послѣднемъ равенствѣ

a_n черезъ x_n; у насъ получится истинное значенiе x непрерывной дроби, т.-е. будетъ:

$$x = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}},$$

при чемъ x_n содержится между a_n и $a_n + 1$. Рѣшая это уравненiе относительно x_n, находимъ:

$$x_n = \frac{Q_{n-2}x - P_{n-2}}{P_{n-1} - Q_{n-1}x}, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}} x_n = \frac{x - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x}. \tag{6}$$

Первая часть положительна и больше единицы — значитъ, $x - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x$ одинаковы по знаку и вторая разность меньше первой, что и требовалось доказать.

§ 349. Такъ какъ непрерывная дробь содержится между двумя послѣдовательными подходящими, то принимая за истинное ея значенiе подходящую $\frac{P_n}{Q_n}$, мы сдѣлаемъ ошибку, которая меньше разности $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ — между этою и слѣдующею подходящими дробями; эта ошибка и *подавно (a fortiori)* меньше единицы, раздѣленной на квадратъ знаменателя взятой подходящей дроби, т.-е. меньше $\frac{1}{Q_n^2}$.

§ 350. *Никакая дробь съ членами меньшими, чѣмъ у нѣкоторой подходящей, не можетъ подходить ближе къ истинному значенiю непрерывной дроби, чѣмъ эта подходящая.*

Пусть дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ подходитъ ближе къ истинному значенiю непрерывной дроби, чѣмъ подходящая $\frac{P_n}{Q_n}$. Такая дробь должна, очевидно, содержаться между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; дѣйствительно, если разность $\frac{\alpha}{\beta} - x$ того же знака, что и разность $\frac{P_n}{Q_n} - x$, то $\frac{\alpha}{\beta}$ содержится

между $\frac{P_n}{Q_n}$ и x, а если эти разности противоположныхъ знаковъ, то $\frac{\alpha}{\beta}$ непремѣнно содержится между x и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, такъ какъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ отстоитъ отъ x дальше, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Отсюда заключаемъ, что разность

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{Q_{n-1}\alpha-P_{n-1}\beta}{\beta Q_{n-1}} \tag{7}$$

по абсолютной величинѣ меньше разности

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{\mp 1}{Q_n Q_{n-1}}, \tag{8}$$

а такъ какъ числитель второй части равенства (7), будучи цѣлымъ числомъ, не можетъ быть меньше соотвѣтственнаго числителя въ равенствѣ (8). то знаменатель долженъ быть больше; слѣдовательно,

$$\beta > Q_n.$$

Такъ же можно доказать, что

$$\alpha > P_n,$$

въ самомъ дѣлѣ, зная изъ предыдущаго, что $\frac{\alpha}{\beta}$ содержится между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, заключаемъ, что $\frac{\beta}{\alpha}$ содержится между $\frac{Q_n}{P_n}$ и $\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$ и, слѣдовательно, разность

$$\frac{\beta}{\alpha}-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}=\frac{\beta P_{n-1}-\alpha Q_{n-1}}{\alpha P_{n-1}}$$

по абсолютной величинѣ меньше разности

$$\frac{Q_n}{P_n}-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}=\frac{P_{n-1}Q_n-Q_{n-1}P_n}{P_n P_{n-1}}=\pm\frac{1}{P_n P_{n-1}},$$

а отсюда выводимъ, что

$$\alpha > P_n.$$

Итакъ, оба члена дроби $\frac{\alpha}{\beta}$ больше соотвѣтственныхъ членовъ дроби $\frac{P_n}{Q_n}$.

Можно было бы ограничиться доказательствомъ, что знаменатель β больше Q_n, если $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$ представляютъ подходящія для дроби

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\; + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{}{\ddots}}}}}$$

и что $\frac{\alpha}{\beta}$ заключается между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; въ самомъ дѣлѣ, обратныя дроби: $\frac{Q_0}{P_0}, \frac{Q_1}{P_1}, \frac{Q_2}{P_2}, \ldots, \frac{Q_n}{P_n}, \ldots$ будутъ подходящими для

$$\frac{1}{x} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\; + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{}{\ddots}}}}}}$$

и дробь $\frac{\beta}{\alpha}$ будетъ содержаться между $\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$ и $\frac{Q_n}{P_n}$, а это показываетъ, что предыдущее доказательство остается справедливымъ и для обратныхъ дробей.

III. Періодическія непрерывныя дроби.

§ 351. Пусть будетъ дана дробь

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\; + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{\; + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}}}}}}$$

въ которой составляющія ее частныя дроби повторяются періодически и, притомъ, безъ конца. Очевидно, что

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}}}. \tag{9}$$

Пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ будетъ подходящая дробь, получаемая при концѣ перваго періода, а $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ — двѣ предыдущія подходящія дроби; въ такомъ случаѣ

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}}.$$

Чтобы получить полную дробь x, нужно, очевидно, въ $\frac{P_n}{Q_n}$, на основаніи равенства (9), измѣнить a_n на $a_n + \frac{1}{x}$; поэтому пишемъ:

$$x = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{x}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{x}\right) + Q_{n-2}} = \frac{(P_{n-1}a_n + P_{n-2})x + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})x + Q_{n-1}} = \frac{P_n x + P_{n-1}}{Q_n x + Q_{n-1}};$$

слѣдовательно, x есть корень уравненія:

$$Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)x - P_{n-1} = 0,$$

и такъ какъ это уравненіе имѣетъ только одинъ положительный корень, то значеніе для x будетъ вполнѣ опредѣленнымъ.

§ 352. Значеніе смѣшанной періодической дроби находится подобнымъ же путемъ. Дано:

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b_1 + \ddots}}}}}}}}}}}$$

гдѣ послѣ $n+1$ частныхъ дробей, входящихъ въ ея составъ и не принадлежащихъ къ періоду, начинается періодъ изъ $(m+1)$ членовъ. Введемъ обозначеніе:

$$y = b + \cfrac{1}{b_1 + \cdots + \cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{b + \cdots}}}$$

тогда

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{y}}}}$$

Пусть $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ будутъ двѣ подходящія дроби, въ которыя послѣдними неполными частными входятъ соотвѣтственно a_{n-1} и a_n; въ такомъ случаѣ мы можемъ написать:

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

гдѣ y опредѣляется по предыдущему параграфу, а, слѣдовательно, будетъ извѣстнымъ и x.

Такъ, напр., если

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} \qquad (10)$$

то, полагая

$$y = 2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}$$

напишемъ:

$$y = 2 + \frac{1}{y}.$$

Отсюда

$$y^2 - 2y - 1 = 0,$$
$$y = 1 + \sqrt{2},$$
$$x = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Послѣдовательныя подходящія для дроби (10) будутъ:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots$$

и каждая изъ этихъ дробей подходитъ къ $\sqrt{2}$ ближе, чѣмъ какая-нибудь другая съ болѣе простыми членами. Принимая какую-нибудь изъ нихъ за приближенное значеніе $\sqrt{2}$, мы сдѣлаемъ ошибку меньшую, чѣмъ единица, раздѣленная на произведеніе знаменателей этой дроби и слѣдующей.

ДОБАВЛЕНІЕ III.

Методъ исключенія Безу и Эйлера.

---

§ 353. Пусть будутъ $f(x)=0$ и $F(x)=0$ два алгебраическихъ уравненія: первое степени n, а второе степени m, равной или ниже n. Чтобы исключить x изъ этихъ уравненій, достаточно сложить ихъ по-членно, предварительно умноживъ и то, и другое соотвѣтственно на многочлены: u и v, изъ которыхъ первый—степени $(m-1)$, а второй—степени $(n-1)$, подбирая, конечно, коэффиціенты въ этихъ многочленахъ такимъ образомъ, чтобы въ результатѣ исчезли всѣ степени x. Этотъ пріемъ указанъ одновременно (1764 г.) Эйлеромъ и Безу. Уравненія, которыя здѣсь придется рѣшать, всегда будутъ первой степени и весь ходъ дѣйствій, часто весьма длинный не представитъ никакихъ затрудненій.

Пусть будутъ даны, напр., уравненія:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{1}$$
$$F(x)=Ax^2+Bx+C=0. \tag{2}$$

Пишемъ:

$$(Px+Q)f(x)+(px^2+qx+r)F(x)=0 \tag{3}$$

и подбираемъ p, q, r, P, Q такимъ образомъ, чтобы исчезло x изъ уравненія (3); тогда послѣднее будетъ результатомъ исключенія или конечнымъ уравненіемъ. Неизвѣстные коэффиціенты должны будутъ удовлетворять уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &aP+Ap=0,\\ &bP+aQ+Bp+Aq=0,\\ &cP+bQ+Cp+Bq+Ar=0,\\ &dP+cQ+Cq+Br=0,\\ &dQ+Cr=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Какія-нибудь четыре изъ этихъ уравненій опредѣляютъ отношенія коэффиціентовъ: p q, r, P, Q; пятое должно быть слѣдствіемъ четырехъ другихъ. Какъ только четыре изъ уравненій (4) удовлетворены, уравненіе (3) приводится непремѣнно къ пятому; отсюда выводимъ, что система (4) должна имѣть рѣшеніе, отличное отъ рѣшенія: $p=0$, $q=0$, $r=0$, $P=0$, $Q=0$, а для этого необходимо, чтобы общій знаменатель, или соотвѣтствующій опредѣлитель, былъ равенъ нулю; слѣдовательно, конечное уравненіе будетъ:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & A & 0 & 0 \\ l & a & B & A & 0 \\ c & b & C & B & A \\ d & c & 0 & C & B \\ 0 & d & 0 & 0 & C \end{vmatrix} = 0.$$

Этотъ опредѣлитель есть знаменатель системы пяти уравненій первой степени; горизонтальныя линіи его представляютъ коэффиціенты неизвѣстныхъ: P, Q, p, q, r.

§ 354. Предыдущій методъ, столь легкій и столь изящный въ теоріи, на практикѣ представляетъ весьма большія длинноты. Такъ, напр., прилагая этотъ методъ къ двумъ уравненіямъ четвертой степени, мы должны будемъ составить опредѣлитель, служащій общимъ знаменателемъ для восьми неизвѣстныхъ въ восьми уравненіяхъ; въ него войдутъ 40320 членовъ! Многіе изъ нихъ будутъ, правда, равны нулю, но разысканіе остальныхъ и выборъ знаковъ при нихъ представятъ длинную и утомительную работу, хотя и не трудную. Гораздо удобнѣе исключать послѣдовательно степени x, не вводя степеней выше тѣхъ, которыя входятъ въ данныя уравненія. Пусть будутъ даны два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+hx+k=0, \\ Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Hx+K=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Начнемъ съ того, что замѣнимъ эти уравненія двумя другими степени $n-1$; для этого исключимъ послѣдовательно изъ данныхъ уравненій степень x^n и членъ, независящій отъ x, при чемъ во второмъ случаѣ раздѣлимъ обѣ части новаго уравненія на множитель x, общій для всѣхъ его членовъ; получимъ два слѣдующихъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}(Ab-aB)x^{n-1}+(Ac-aC)x^{n-2}+\ldots+Ak-aK=0,\\(Ak-aK)x^{n-1}+(Bk-bK)x^{n-2}+\ldots+Hk-hK=0.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Примѣняя тотъ же методъ къ системѣ (2), замѣнимъ ее двумя уравненіями степени $n-2$; продолжая такимъ же образомъ и далѣе, получимъ только одно уравненіе нулевой степени, какъ результатъ исключенія между двумя уравненіями первой степени, образующими n-ую систему. Это уравненіе есть конечное.

Если оба данныхъ уравненія не одной и той же степени, то указанный методъ долженъ быть слегка измѣненъ, что, впрочемъ, можетъ повести только къ его упрощенію. Пусть будутъ, напр., даны два уравненія, одно—четвертой, а другое—второй степени:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, \qquad (1)$$
$$Ax^2+Bx+C=0. \qquad (2)$$

Сначала исключаемъ члены, независящіе отъ x, вычитая уравненіе (1), умноженное на C, изъ уравненія (2), умноженнаго на e; опуская въ результатѣ множитель x, получимъ уравненіе третьей степени; примѣняя къ этому послѣднему и къ уравненію (2) тотъ же методъ, получимъ уравненіе второй степени; наконецъ, къ двумъ уравненіямъ второй степени приложимъ общій методъ, указанный выше.

§ 355. Есть, наконецъ, третій методъ, который, подобно двумъ другимъ, приводитъ всѣ уравненія къ первой степени; по этому методу различныя степени исключаемой буквы принимаются за столько же различныхъ неизвѣстныхъ. Мы назовемъ его, согласно съ Коши, *сокращеннымъ методомъ Безу*.

Пусть, какъ всегда, $f(x)=0$ и $F(x)=0$ будутъ два алгебраическихъ уравненія: первое—степени n, а второе—степени равной или ниже n; полагаемъ:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\\F(x)&=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

при чемъ нѣкоторые изъ коэффиціентовъ: $b_0, b_1, \ldots, b_n$ могутъ равняться нулю. Чтобы исключить x^n изъ уравненій (1), пишемъ ихъ въ видѣ:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_cx^c=-(a_{c+1}x^{c-1}+a_{c+2}x^{c-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n),$$
$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_cx^c=-(b_{c+1}x^{c-1}+b_{c+2}x^{c-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n),$$

гдѣ c обозначаетъ или число n, или какое-нибудь изъ чиселъ, меньшихъ n, дѣля эти уравненія другъ на друга по-членно и сокращая на множитель x^c, общій для числителя и знаменателя первой части, получимъ:

$$\frac{a_0x^{n-c}+a_1x^{n-c-1}+\ldots+a_c}{b_0x^{n-c}+b_1x^{n-c-1}+\ldots+b_c}=\frac{a_{c+1}x^{c-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_{c+1}x^{c-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n};$$

по освобожденіи отъ знаменателей у насъ будетъ уравненіе $(n-1)$-ой степени относительно x. Но это уравненіе, очевидно, можетъ принять n различныхъ видовъ, смотря по значенію, приписываемому числу c, которое, какъ мы замѣтили, можетъ быть какимъ-угодно изъ чиселъ не выше n; итакъ, мы можемъ написать систему n *различныхъ* уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} A_{0,0}x^{n-1}+A_{1,0}x^{n-2}+\ldots+A_{n-2,0}x+A_{n-1,0}=0, \\ A_{0,1}x^{n-1}+A_{1,1}x^{n-2}+\ldots+A_{n-2,1}x+A_{n-1,1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{0,n-1}x^{n-1}+A_{1,n-1}x^{n-2}+\ldots+A_{n-2,n-1}x+A_{n-1,n-1}=0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

изъ которыхъ первое и послѣднее точно такія, какія употребляются въ предыдущемъ методѣ. Чтобы исключить x, достаточно будетъ въ системѣ (2) принять $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ за различныя неизвѣстныя и выразить, что всѣ эти уравненія совмѣстны.

Можно замѣтить, что умножая послѣдніе члены: $A_{n-1,0}, A_{n-1,1}, \ldots A_{n-1,n-1}$ на одну и ту же новую неизвѣстную u, мы составимъ систему n уравненій съ n неизвѣстными: $x, x^2, \ldots, x^{n-1}, u$, для которой усматривается непосредственно рѣшеніе: $x=0$, $x^2=0, \ldots, u=0$. Такое рѣшеніе не можетъ быть принято: мы должны получить другое, при которомъ $u=1$; для этого же необходимо, чтобы опредѣлитель изъ коэффиціентовъ былъ равенъ нулю, и конечное уравненіе будетъ:

$$\begin{vmatrix} A_{0,0} & A_{1,0} & A_{2,0} & \ldots A_{n-1,0} \\ A_{0,1} & A_{1,1} & A_{2,1} & \ldots A_{n-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{0,n-1} & A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \ldots A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=0.$$

Такой результатъ значительно проще указаннаго въ **§ 354**-омъ,

потому что составляемый здѣсь опредѣлитель содержитъ только n столбцовъ по n количествъ въ каждомъ, тогда какъ другой, составляемый по **§ 354**-ому, въ томъ же самомъ случаѣ содержалъ бы $2n$ столбцовъ. Такъ, напр., опредѣлитель четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными содержитъ всего 24 члена, опредѣлитель же восьми уравненій съ восемью неизвѣстными содержитъ 40320 членовъ.

Таблица дугъ и соотвѣтственныхъ синусовъ и тангенсовъ въ частяхъ радіуса,

служащая для рѣшенія трансцендентныхъ уравненій

Arc.		Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens		Arc.
0	0°	0	1,0000	0	∞	90°	1,5708
0,0175	1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89°	1,5533
0,0349	2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88°	1,5359
0,0524	3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87°	1,5184
0,0698	4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86°	1,5010
0,0873	5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85°	1,4835*
0,1047	6°	0,1045*	0,9945*	0,1051	9,5144	84°	1,4661
0,1222	7°	0,1219	0,9925*	0,1228	8,1443	83°	1,4486
0,1396	8°	0,1392	0,9903	0,1405*	7,1154	82°	1,4312
0,1571	9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81°	1,4137
0,1745	10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80°	1,3963
0,1920	11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	1,3788
0,2094	12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78°	1,3614
0,2269	13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77	1,3439
0,2443	14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	1,3265
0,2618	15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75°	1,3090
0,2793	16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74°	1,2915*
0,2967	17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73°	1,2741
0,3142	18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72°	1,2566
0,3316	19°	0,3256	0,9455*	0,3443	2,9042	71°	1,2392
0,3491	20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70°	1,2217
0,3665*	21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69°	1,2043
0,3840	22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68°	1,1868
0,4014	23°	0,3907	0,9205*	0,4245	2,3559	67°	1,1694
0,4189	24°	0,4067	0,9135*	0,4452	2,2460	66°	1,1519
0,4363	25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445*	65°	1,1345
0,4538	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64°	1,1170
0,4712	27°	0,4540	0,8910	0,5095*	1,9626	63°	1,0996
0,4887	28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62°	1,0821
0,5061	29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61°	1,0647
0,5236	30°	0,5	0,8660	0,5774	1,7321	60°	1,0472
0,5411	31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59°	1,0297
0,5585*	32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58	1,0123
0,5760	33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57°	0,9948
0,5934	34°	0,5592	0,8290	0,6745*	1,4826	56°	0,9774
0,6109	35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55°	0,9599
0,6283	36°	0,5878	0,8090	0,7265*	1,3764	54°	0,9425
0,6458	37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53°	0,9250
0,6632	38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52°	0,9076
0,6807	39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51°	0,8901
0,6981	40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50°	0,8727
0,7156	41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49°	0,8552
0,7330	42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48°	0,8378
0,7505	43°	0,6820	0,7314	0,9325*	1,0724	47°	0,8203
0,7679	44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355*	46	0,8029
0,7854	45°	0,7071	0,7071	1,	1,	45	0,7854
Arc.		Cosinus	Sinus	Cotangens	Tangens		Arc.

Примѣч. Звѣздочками (*) помѣчены тѣ цифры 5, при отбрасываніи которыхъ должно увеличить предыдущую цифру (въ вычисленіяхъ съ тремя цифрами послѣ запятой).

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
49	10 сверху	$(x+a)^{2m}$	$(x+a)^{2m}$
—	6 снизу	α_1	a_1
55	14 сверху	бóльше	большие
64	8 снизу	a^{bx}	a^{b^x}
—	9 "	"	"
85	9 сверху	поэтому $f''(x)$	поэтому $f'(x)$
158	6 "	дасть	дастъ
271	*На чертежѣ слѣдуетъ соединить точку M съ точкою C*		
303	3 снизу	$\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right)$	$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$

КУРСЫ,
РАЗРѢШЕННЫЕ Г. ПОПЕЧИТЕЛЕМЪ
САНКТПЕТЕРБУРГСКАГО
УЧЕБНАГО ОКРУГА

М. В. ПИРОЖКОВЪ,
преподаватель С.-Пб. 10-й гимназіи

С.-Пб., Вас. Остр., 3 л., д. 10

КУРСЫ

для приготовленія молодыхъ людей къ повѣрочнымъ вступительнымъ экзаменамъ въ институты: **Инженеровъ Путей Сообщенія, Горный, Гражданскихъ Инженеровъ, Технологическій и Электротехническій.**

Курсы продолжаются съ 1 октября до конца вступительныхъ экзаменовъ въ высшія техническія учебныя заведенія (до конца августа) Занятія ведутся по слѣдующимъ предметамъ: **математикѣ** (*теоретической приментикъ, алгебрѣ, геометріи и тригонометріи*), **физикѣ, русскому языку, рисованію, французскому и нѣмецкому языкамъ.**

Курсы дѣлятся на три періода. 1) **зимній** (съ 1 октября до 23 декабря), 2) **весенній** (съ 1 февраля по 1 мая, и **лѣтній** (съ 15 іюня до конца августа) съ вполнѣ заканчиваемою подготовкою въ каждый изъ этихъ трехъ сроковъ.

Плата за подготовку въ продолженіе одного изъ поименованныхъ сроковъ **300** р по математикѣ и физикѣ и **400** р. по всѣмъ предметамъ; за подготовку въ теченіе двухъ изъ этихъ сроковъ плата повышается на **200** р.

Занятія ведутся ежедневно. *по утрамъ*, въ теченіе 3 часовъ и *по вечерамъ*, въ теченіе 2 часовъ.

Зимній и *весенній* періоды рекомендуются тѣмъ, кто желаетъ подготовиться, не спѣша, или кто не можетъ справиться съ программами въ теченіе только лѣта по причинѣ недостаточности знаній, вынесенныхъ изъ средняго учебнаго заведенія, въ эти сроки вечернія занятія посвящаются математикѣ и физикѣ а утреннія – остальнымъ предметамъ.

ПРОГРАММЫ:

По Ариѳметикѣ. — Курсъ 8-го класса гимназій. **Рѣшеніе теоретическихъ задачъ.**

По Алгебрѣ. — Курсъ гимназій. Дополненія: подробное разсмотрѣніе уравненій высшихъ степеней съ одною и нѣсколькими неизвѣстными, приводимыхъ къ квадратнымъ; подробная статья о комплексныхъ числахъ въ алгебраическомъ видѣ; двучленныя уравненія вида: $x^2 \pm 1 = 0$ $x^3 \pm 1 = 0$, $x^4 \pm 1 = 0$, $x^5 \pm 1 = 0$, $x^6 \pm 1 = 0$, $x^8 \pm 1 = 0$, $x^9 \pm 1 = 0$, $x^{10} \pm 1 = 0$, $x^{12} \pm 1 = 0$; основныя теоремы о предѣлахъ; болѣе научная теорія непрерывныхъ дробей, особенно безконечныхъ періодическихъ; теорія несоизмѣримыхъ (ирраціональныхъ чиселъ), куда входитъ, между прочимъ, доказательство существованія r-ой степени изъ вещественнаго числа A, доказательство существованія логариѳма для всякаго положительнаго числа при положительномъ основаніи, и пр. **Рѣшеніе задачъ.**

По Геометріи. — Курсъ гимназій. **Рѣшеніе задачъ** какъ на вычисленіе, такъ и въ особенности **на построеніе.**

По Тригонометріи. — Курсъ гимназій. **Задачи** на уравненія, приведеніе къ логариѳмическому виду и на рѣшеніе треугольниковъ.

По Физикѣ. — Курсъ гимназій. **Рѣшеніе задачъ** по слѣдующимъ отдѣламъ: 1) начальныя свѣдѣнія изъ статики: сложеніе и разложеніе силъ, параллелограммъ силъ; 2) равномѣрно-перемѣнное движеніе; 3) связь между вѣсомъ, объемомъ и плотностью въ примѣненіи къ метрическимъ и русскимъ мѣрамъ; вліяніе температуры; 4) связь между объемомъ, давленіемъ и температурой данной массы газа; 5) законъ Архимеда; 6) калориметрическій методъ смѣшенія; смѣшеніе, сопровождающееся измѣненіемъ состоянія тѣлъ; скрытая теплота плавленія и кипѣнія; 7) законъ Ома; 8) законъ Джоуля и Ленца.

По русскому языку. — Писаніе сочиненій на темы, какія задаются на конкурсныхъ экзаменахъ; предварительное разъясненіе темъ (планы сочиненій); разборъ сдѣланныхъ ошибокъ: какъ стилистическихъ, такъ и грамматическихъ.

По Рисованію. — Рисованіе съ натуры комбинацій простѣйшихъ геометрическихъ тѣлъ: призмъ, пирамидъ цилиндровъ и конусовъ; рисованіе болѣе или менѣе сложныхъ орнаментовъ готовящимися въ Институтъ Гражданскихъ Инженеровъ.

По Французскому и *Нѣмецкому языкамъ.* — Повтореніе главнѣйшихъ правилъ этимологіи и синтаксиса упражненіе въ переводахъ на русскій языкъ à livre ouvert и въ легкихъ разговорахъ.

Программы *Курсовъ* согласованы съ программами вступительныхъ конкурсныхъ экзаменовъ и занятія, по опыту прежнихъ лѣтъ, точно разсчитаны на каждый день.

М. В. Пирожковъ.

1506 стр.). Цѣна по подпискѣ отдѣльно на каждый томъ 5 р. По выходѣ въ свѣтъ цѣна будетъ повышена (Печатаніе начнется съ 1902 г.).

Дифференціальное исчисленіе. *Содержаніе:* **Книга I.** *Дифференціалы и производныя* (безконечно-малыя различныхъ порядковъ и ихъ употребленіе въ геометріи; производныя и дифференціалы перваго порядка; функціональный опредѣлитель; теорія касательныхъ линій и плоскостей; дифференціалы нѣкоторыхъ функцій, опредѣляемыхъ геометрически; производныя и дифференціалы порядка выше перваго; преобразованіе перемѣнныхъ, образованіе дифференціальныхъ уравненій). — **Книга II.** *Развертываніе въ ряды* (общая теорія рядовъ; теорема Тэйлора; нѣкоторыя развертыванія въ ряды; функціи мнимой перемѣнной; развертываніе функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ; развертыванія въ безконечныя произведенія; развертыванія въ непрерывныя дроби; раскрытіе неопредѣленностей; теорія особенныхъ точекъ; maxima и minima). — **Книга III.** *Приложенія къ геометріи* (кривизна плоскихъ линій; кривизна линій, нанесенныхъ на сферѣ; соприкасающаяся плоскость для кривой двоякой кривизны; двѣ кривизны кривой; соприкасающійся кругъ и соприкасающаяся сфера; кривизна поверхностей; нормали къ поверхности; линіи кривизны; линіи, нанесенныя на поверхности).

Интегральное исчисленіе. *Содержаніе:* **Книга I.** *Опредѣленные и неопредѣленные интегралы* (различные методы для интегрированія дифференціальныхъ выраженій; интегрированіе раціональныхъ дробей; интегрированіе алгебраическихъ ирраціональностей; интегрированіе тригонометрическихъ и показательныхъ функцій; невозможность нѣкоторыхъ интегрированій; непосредственное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ; вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ при помощи рядовъ; дифференцированіе и интегрированіе подъ знакомъ $\int$; нѣкоторые опредѣленные интегралы, полученные при помощи различныхъ пріемовъ; теорія Эйлеровыхъ интеграловъ; интегралы между мнимыми предѣлами; численное приближенное значеніе опредѣленнаго интеграла). — **Книга II.** *Приложенія и дальнѣйшія развитія* (вычисленіе плоскихъ площадей и дугъ кривой; вычисленіе кривыхъ поверхностей; опредѣленіе объемовъ; вычисленіе притяженія твердыхъ тѣлъ; теорія многократныхъ интеграловъ; нѣкоторыя развертыванія въ ряды; интегрируемость дифференціальныхъ функцій). — **Книга III.** *Теорія эллиптическихъ функцій* (теоремы, относящіяся къ сложенію интеграловъ; двойная періодичность эллиптическихъ функцій; умноженіе и дѣленіе аргумента; выраженіе функцій въ видѣ произведеній; функціи $H(x)$ и $\Theta(x)$ Якоби; преобразованіе эллиптическихъ функцій; численныя вычисленія).

Всѣ переводы — безъ всякихъ сокращеній и измѣненій.

Издательство М. В. Пирожкова поставило своею задачею выпустить на русскомъ языкѣ цѣлый рядъ учебниковъ и сочиненій по чистой и прикладной математикѣ извѣстныхъ ученыхъ. Въ ближайшемъ будущемъ, кромѣ Ж. Бертрана, будутъ изданы руководства **Серре**.

Дозволено цензурою. Спб. 2[illegible] сент. 1901 г.

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 5 л., 28.